Міністерство освіти і науки України

Криворізький технічний університет

Є.О. Несмашний

КЛАСИЧНА МЕХАНІКА. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Кривий Ріг

ББК 22.3
УДК 530.1
Н 55

Рецензенти: завідувач кафедри фізики Криворізького педагогічного університету, проф., докт. фіз.-мат. наук Е.Я.Глушко;
завідувач кафедри фізики Національної гірничої академії України, проф., канд. фіз.-мат. наук І.П.Гаркуша.

Несмашний Є.О.

Н 55. Класична механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / Навчальний посібник. -Кривий Ріг: Мінерал, 2001. -211 з.: іл.

ISBN 5-7763-1955-2

Навчальний посібник має за мету полегшити вивчення студентами першого розділу загальної фізики, а саме: класичної механіки; молекулярної фізики і термодинаміки.

Посібник містить курс лекцій з означених дисциплін, що читається автором студентам Криворізького технічного університету, контрольні завдання з механіки, молекулярної фізики і термодинаміки та методичні вказівки до їх виконання.

Для студентів технічних університетів усіх форм навчання.

Іл. 107, Бібліогр. 7.

Гриф надано 20. 04. 2001 р. № 14/182-530
заступником міністра Степко М.Ф.

ББК 22.3
ISBN 5-7763-1955-2

ПЕРЕДМОВА

Мета цього навчального посібника надати допомогу студентам технічних університетів очної та заочної форм навчання у вивченні курсу загальної фізики.

Європейський стандарт освіти передбачає отримання кожним студентом методичних вказівок по вивченню кожної дисципліни. Саме для цього на кафедрі фізики КТУ написані, підготовлені до друку та видані масовим тиражем методичні посібники з окремих розділів курсу загальної фізики. А саме: “Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка”, “Електродинаміка” та “Оптика. Квантова механіка. Атомна фізика”.

Кожні методичні вказівки містять в собі:

- курс лекцій з вказаного розділу загальної фізики, що читається автором на протязі багатьох років студентам Криворізького технічного університету;

- індивідуальні контрольні завдання з означених розділів загальної фізики, що повинні бути виконані студентами, та методичні вказівки до виконання цих контрольних завдань;

- додатки, у вигляді довідкового матеріалу, який необхідний для виконання контрольних робіт.

Крім цього у кожній книжці є таблиця варіантів, з яких лаборантами кафедри фізики КТУ, для кожного студента окремо, визначаються номери задач, які він повинен розв’язати при виконанні контрольних робіт.

Методично, кожна книжка побудована таким чином, щоб її змісту було цілком достатньо для вивчення означеної дисципліни, вдалого виконання контрольних робіт та успішної здачі залікових та екзаменаційних іспитів. Зміст даних методичних вказівок повністю відповідає освітньо-професійним програмам вищої освіти за відповідними професійними спрямуваннями з курсу загальної фізики, що затверджені Міністерством освіти України у 1994 році.

Автор висловлює щиру подяку доценту кафедри М.М. Зайцеву за допомогу у написанні цього навчального посібника та підготовці його до друку.

ВСТУП

Фізика, у загальному розумінні цього слова, - *це наука, що вивчає найпростіші і разом з тим найзагальніші явища природи, властивості та будову матерії, закони її руху.*

У наш час відомі тільки два види неживої матерії: речовина та поле. До речовини відносяться атоми, молекули та усі тіла, що з них складаються. Другий вид матерії – поле - складають гравітаційне, електромагнітне та інші поля.

Матерія безперестанно рухається у просторі й часі, які і є формами буття матерії. При цьому під рухом матерії розуміється будь-яка зміна взагалі, а не тільки механічний рух матерії.

Фізичні закони встановлюються на основі узагальнення дослідних фактів і відтворюють об’єктивні закономірності, що існують у природі.

Дослід - це спостереження явища, що досліджується, в точно контрольованих умовах, які дозволяють відтворити його кожний раз при повторенні цих умов.

Гіпотеза - це наукове припущення, що висувається для пояснювання якогось факту або явища і яке потребує експериментальної перевірки і доказів. Гіпотеза, що успішно витримала таку перевірку, стає фізичним законом або фізичною теорією.

Фізичний закон встановлює кількісний або якісний зв’язок між параметрами одного окремого природного явища.

Фізична теорія дає пояснення цілої сукупності явищ природи з єдиної точки зору.

Враховуючи, що фізичний закон встановлює кількісний зв’язок між фізичними параметрами, їх необхідно вимірювати.

Вимірювання фізичної величини - це дія, що виконується за допомогою засобів вимірювання для знаходження значень фізичного параметра у прийнятих одиницях. У загальному випадку одиниці фізичних величин можуть бути якими завгодно, але у цьому випадку виникають значні труднощі при їх порівнянні. Тому в Україні, як майже у всьому світі, використовується Міжнародна система одиниць СІ.

РОЗДІЛ ПЕРШИЙ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

ЧАСТИНА ПЕРША
КЛАСИЧНА МЕХАНІКА

Класична механіка є складовою частиною загальної фізики і вивчає найпростішу форму руху матерії - механічний рух. Механічний рух являє собою переміщення тіл або їх частин, відносно один одного.

Розвиток механіки як науки почався з III віку до нашої ери, коли видатний вчений древності Архімед (287-212 до н.е.) сформулював закон рівноваги важеля та закони рівноваги плаваючих тіл.

Основні закони механіки виявлені Г.Галілеєм (1564-1642) та остаточно сформульовані І.Ньютоном (1643-1727). Механіка Галілея - Ньютона вивчає закони руху макроскопічних тіл, швидкість яких незначна у порівнянні з швидкістю світла. Закони руху макроскопічних тіл з швидкістю, яку можна порівняти з швидкістю світла, вивчається у рамках релятивістської механіки, основні принципи якої були встановлені А.Ейнштейном (1879-1955).

Для опису руху мікроскопічних тіл (окремі атоми, елементарні частинки) працею цілого ряду видатних фізиків XX сторіччя розроблена квантова механіка.

Спочатку ми будемо вивчати рух макроскопічних тіл, швидкість яких незначна у порівнянні з швидкістю світла. При цьому простір та час ми будемо розглядати як об'єктивні форми буття матерії, однак у відриві друг від друга та від руху матеріальних тіл.

Класична механіка розподіляється на три розділи.

Статика вивчає закони рівноваги системи тіл.

Кінематика - вивчає закони, які описують механічний рух матеріальних тіл незалежно від причин, що визвали цей рух.

Динаміка - вивчає закони, які описують механічний рух матеріальних тіл та ті причини, що визвали або змінили цей рух.

Необхідно вказати, що закони рівноваги матеріальних тіл - це окремі випадки більш загальних законів їх руху. Якщо визначені закони руху тіл, тоді не складно встановити й закони їх рівноваги, тому закони статики окремо від законів динаміки нами не розглядаються.

ГЛАВА 1.
КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1. Системи відліку. Траєкторія. Шлях та переміщення.

Усі тіла, що нас оточують, складаються з величезної кількості атомів і молекул, які в комплексі являють собою макроскопічні системи. Механічні властивості таких систем визначаються їх хімічним складом, внутрішньою будовою та структурою, вивчення яких виходить за рамки механіки. Тому для описування стану макроскопічних тіл в механіці користуються різними спрощеними моделями, а саме: матеріальною точкою; абсолютно твердим тілом; абсолютно пружним тілом та таким іншим.

Матеріальною точкою називають тіло деякої маси, форма та розміри якого несуттєві в умовах конкретного завдання.

Одне й теж тіло в одних випадках можливо вважати матеріальною точкою, а в інших - ні. Наприклад, розглядаючи рух планет навколо Сонця, ці тіла можливо вважати матеріальними точками, бо їх розміри дуже малі у порівнянні з розмірами орбіт. Проте, Землю неможливо вважати матеріальною точкою в задачах, пов'язаних з рухом тіл на поверхні Землі.

Абсолютно твердим тілом називають тіло, відстань між будь-якими двома його точками завжди залишається незмінною при любих випробуваннях.

Вище приведенні поняття цілком абстрактні, але їх використання значно полегшує рішення конкретних фізико-механічних задач.

Усі тіла матеріального світу рухаються у просторі та часі. Для однозначного визначення положення деякого тіла у довільний момент часу необхідно вибрати систему відліку. Положення деякого тіла у просторі може бути визначене тільки по відношенню до другого довільно визначеного тіла, яке отримало назву: тіло відліку.

Умовно нерухоме тіло відліку та жорстко зв'язана з ним довільна система координат, яка забезпечена годинником, отримали назву: система відліку. Кількість незалежних координат, які повністю визначають положення матеріальної точки у просторі називається числом ступенів свободи.

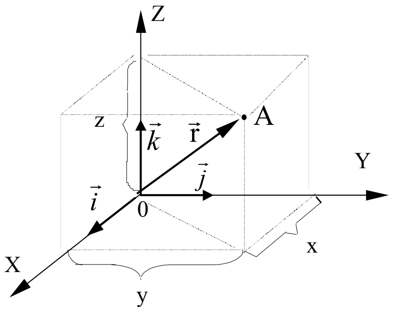

Рис. 1.1.

Траєкторією руху матеріальної точки називається лінія в просторі по якій рухається матеріальна точка відносно вибраної системи відліку. В залежності від форми траєкторії рух тіла може бути прямолінійним або криволінійним.

У класичній механіці найбільш часто використовують прямокутні, або декартові системи координат (див. рис. 1.1).

Положення точки А відносно декартової системи координат можливо задати двома еквівалентними способами: або вказати значення усіх координат x, y, z точки A; або вказати значення радіуса-вектора $\vec{r}$ цієї точки. Якщо через i, j, k позначити одиничні вектори, то радіус-вектор буде визначатись так:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ ; \qquad (1.1)$$

А модуль радіус-вектора дорівнює:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ;$$

Якщо точки А рухається, її координати та радіус-вектор змінюються з часом. Для того, щоб визначити закони руху точки, необхідно вказати функціональну залежність від часу t усіх трьох її координат у параметричній (1.2), або векторній формі (1.3).

Ці рівняння називають рівняннями руху.

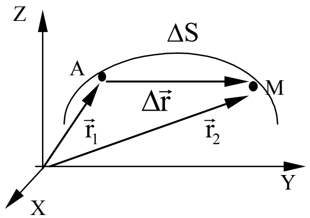

Рис. 1.2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}; \qquad (1.2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\ ; \qquad (1.3)$$

Довжина шляху ΔS - це скалярна величина, що дорівнює частині траєкторії, яку пройшла точка за вибраний проміжок часу.

Розглянемо рух матеріальної точки по довільній траєкторії (див. рис. 1.2).

Нехай матеріальна точка рухається по криволінійній траєкторії так, що в момент часу $t = t_1$ вона знаходилась в точці А (радіус-вектор r_1), а в момент часу $t = t_2$ - у точці М (радіус-вектор r_2). Довжина шляху за цей час буде дорівнювати ΔS = AM.

Вектор переміщення $\Delta\vec{r}$ це вектор проведений з початкового положення точки у положення яке вона займає у даний момент часу:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\ ; \qquad (1.4)$$

З малюнка на рис. 1.2 зрозуміло, що довжина шляху матеріальної точки завжди перевищує модуль її вектора переміщення, тобто:

$$\Delta S \geq |\Delta\vec{r}|\ ; \qquad (1.5)$$

Знак рівності у формулі (1.5) має місце лише при прямолінійному русі матеріальної точки або тіла.

1.2. Швидкість матеріальної точки.

Для характеристики руху матеріальної точки використовується векторна величина - швидкість, яка визначає як стрімкість руху, так і його напрямок в даний момент часу. Нехай у момент часу t положення точки визначається радіусом-вектором r. За проміжок часу Δt точка пройде шлях ΔS та отримає переміщення $\Delta\vec{r}$ (див. рис. 1.3).

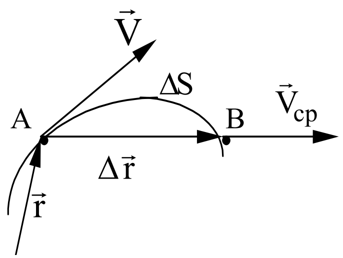

Рис. 1.3.

Середня швидкість руху V_{cp} - це вектор, що дорівнює відношенню радіуса-вектора до проміжку часу Δt, за який це переміщення отримано:

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ ; \qquad (1.6)$$

Напрямок вектора середньої швидкості збігається з напрямком вектора переміщення.

Якщо час Δt наближається до нуля, то границя середньої швидкості буде дорівнювати миттєвій швидкості V:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ ; \qquad (1.7)$$

Таким чином, миттєва швидкість дорівнює першій похідній від радіуса-вектора по часу.

Через те, що при $\Delta t \to 0$, модуль радіуса-вектора матеріальної точки дорівнює довжині шляху, модуль вектора миттєвої швидкості можливо визначити таким чином:

$$V = \left|\vec{V}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\Delta \vec{r}\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \qquad (1.8)$$

Тобто, модуль миттєвої швидкості дорівнює першій похідній від шляху по часу.

Розмірність швидкості руху в системі СІ: $[V] = [r/t] = [\text{м с}^{-1}]$.

Вектор $\vec{v}$ можна розкласти на три основні складові V_X, V_Y, V_Z по осях декартової системи координат, тобто привести його у вигляді :

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}\ ; \qquad (1.9)$$

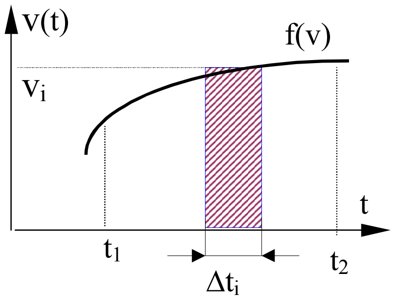

Рис. 1.4.

Знаючи модуль вектора миттєвої швидкості в кожний момент часу, можливо обчислити шлях, що пройшла матеріальна точка за деякий час. Інтегруючи вираз (1.8) у границях від t_1 до t_2, маємо:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dS = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt\ ; \qquad (1.10)$$

Одержаний інтеграл має простий геометричний зміст (див. рис. 1.4).

Добуток $V_i\,\Delta t_i$ приблизно дорівнює площі заштрихованої криволінійної трапеції. Сума таких добутків приблизно дорівнює площі фігури, що обмежена кривою $V = f(t)$, віссю t, та двома ординатами t_2 та t_1. Звідси витікає, що площа вказаної фігури і дорівнює шляху, що пройшла матеріальна точка за проміжок часу $t_2 - t_1$.

У випадку рівномірного руху матеріальної точки чи тіла, коли V = const, з виразу (1.10) отримаємо:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V\,dt = V\int_{t_1}^{t_2} dt = V(t_2 - t_1) = V\Delta t\ ; \qquad (1.11)$$

Отриманий вираз нам добре знайомий з елементарної кінематики.

1.3. Прискорення та його складові.

Для характеристики зміни швидкості руху тіла з часом, як по модулю так і по напрямку, використовується поняття про вектор прискорення.

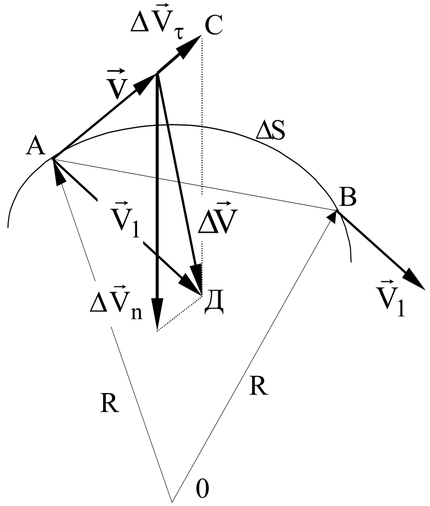

Рис. 1.5

Розглянемо рух матеріальної точки по довільній траєкторії (див. рис. 1.5). Нехай в момент часу t точка знаходиться в положенні A. За час Δt точка перейде в положення B, пройшовши шлях ΔS. При цьому швидкість її руху зросла від $\vec{v}$ до $\vec{v}_1$, і дорівнює $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$.

Середнім прискоренням нерівномірного руху точки називається векторна величина, яка дорівнює відношенню зміни її швидкості $\Delta\vec{V}$ до проміжку часу Δt за яке воно сталося:

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}\ ; \qquad (1.12)$$

Миттєвим прискоренням матеріальної точки або тіла є вектор, що дорівнює границі середнього прискорення при умові, що $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \qquad (1.13)$$

Але:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}; \qquad (1.14)$$

Тобто миттєве прискорення дорівнює першій похідній від вектора швидкості, або другій похідній від радіуса-вектора по часу.

Розмірність прискорення у системі СІ: $[a] = [V / t] = [\text{м с}^{-2}]$.

А тепер виконаємо паралельне перенесення вектора $\vec{V}_1$ так, щоб його початок співпав з початком вектора $\vec{V}$. Різницю цих векторів, вектор $\Delta\vec{V}$, розкладемо на дві складові: $\Delta\vec{V}_n$ та $\Delta\vec{V}_\tau$ (див. рис. 1.5).

З цього рисунка зрозуміло, що вектор $\Delta\vec{V}_n$ несе відповідальність за зміну швидкості за напрямком, а вектор $\Delta\vec{V}_\tau$ - за зміну вектора швидкості за її модулем.

Границя відношення модуля вектора $\Delta\vec{V}_\tau$ до проміжку часу Δt за який він змінився, отримала назву тангенціального прискорення. Тоді:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_\tau}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}; \qquad (1.16)$$

Таким чином, тангенціальне прискорення дорівнює першій похідній від швидкості матеріальної точки по часу.

Зробимо більш детальний аналіз геометричної схеми, яка приведена на рис. 1.5.

З подібності трикутників ABO і АСД маємо: $AB/R = \Delta V_n/V_1$. Враховуючи, що за умови $\Delta t \to 0$, $AB = V\,\Delta t$, отримаємо:

$$\frac{\Delta V_n}{\Delta t} = \frac{V V_1}{R};$$

Границя відношення модуля вектора ΔV_n до проміжку часу Δt за який він змінився, отримала назву нормального прискорення.

У граничному випадку, при $\Delta t \to 0$, $V_1 \to V$, і тоді маємо:

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_1 V}{R} = \frac{V^2}{R}; \qquad (1.17)$$

де R - радіус кривизни траєкторії у даній точці.

Через те, що точки А та В на рис. 1.5 при умові $\Delta t \to 0$, будуть на дуже малій відстані одна від одної, можна довести, що $\Delta\vec{V}_n \perp \Delta\vec{V}_\tau$. А це означає взаємну перпендикулярність нормального та тангенціального прискорення.

Таким чином, вектор тангенціального прискорення дотичний до траєкторії, а вектор нормального прискорення перпендикулярний до

траєкторії у даній точці, та спрямований вздовж радіуса кривизни траєкторії до її центра (див. рис. 1.6).

Величина, обернена радіусу кривизни траєкторії руху тіла, називається кривизною цієї траєкторії.

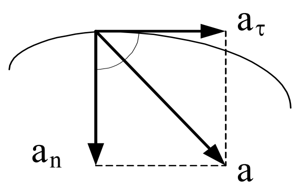

Рис. 1.6.

Вектор повного прискорення тіла та його модуль знаходять за такими формулами:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau; \qquad (1.18)$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}; \qquad (1.19)$$

На завершення даної теми ще раз підкреслимо, що тангенціальна складова прискорення характеризує бистроту зміни швидкості по модулю, а нормальна - бистроту зміни швидкості за напрямком.

1.4. Кутова швидкість та кутове прискорення.

Найпростішим випадком криволінійного руху являється рух матеріальної точки по колу радіусом R.

Нехай точка за деякий час Δt перемістилась по колу з позиції радіуса-вектора у пункті 1 на позицію у пункт 2. При цьому вона повернеться навколо осі обертання на кут Δφ (див. рис. 1.7).

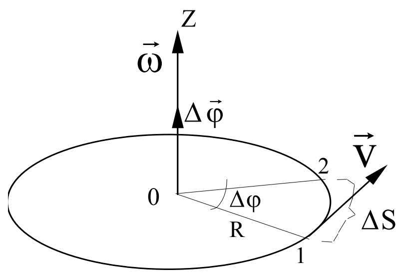

Рис. 1.7.

Вектором кутового переміщення $\Delta\vec{\varphi}$ називають вектор, який чисельно дорівнює куту повороту Δφ, здійснений за час Δt, і направлений по осі обертання так, що з його кінця напрямок руху точки по колу має бути проти годинникової стрілки.

Вектором середньої кутової швидкості називають відношення вектора кутового переміщення матеріальної точки до часу за який це переміщення здійснено.

Тобто:

$$\vec{\omega}_{cp} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}\ ; \qquad (1.20)$$

Вектор миттєвої кутової швидкості - це границя, до якої наближається середня кутова швидкість при умові, що $\Delta t \to 0$.

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\ , \qquad (1.21)$$

А це означає що перша похідна по часу від вектора кутового переміщення дорівнює кутовій швидкості матеріальної точки.

Кутова швидкість відноситься до групи так званих псевдовекторів, бо вони прикладені не до матеріального тіла, а до умовної осі обертання. Псевдовектор $\vec{\omega}$ має той же напрямок, що й вектор $\Delta\vec{\varphi}$ (див. рис. 1.7).

Визначимо модуль лінійної швидкості точки, яка обертається по колу, та встановимо зв'язок між кутовою та лінійною швидкістю:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi\ R}{dt} = \frac{\omega\ dt\ R}{dt} = \omega R\ ; \qquad (1.22)$$

Якщо ω = const, тоді обертання тіла буде рівномірним і його можливо характеризувати періодом обертання T - часом, за який тіло робить один повний обіг, тобто повертається на кут 2π.

За час Δt = T тіло повернулося на кут Δφ = 2π, тоді:

$$\omega = 2\pi / T\ ; \qquad (1.23)$$

Число повних обертів, що зробило тіло при рівномірному руху по колу в одиницю часу називається частотою обертання n:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\ ; \qquad (1.24)$$

Зміна вектора кутової швидкості з часом характеризується вектором кутового прискорення:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\ ; \qquad (1.25)$$

Або, з урахуванням формули (1.21), маємо:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}\ ; \qquad (1.26)$$

Таким чином, вектор кутового прискорення дорівнює першій похідній від вектора кутової швидкості, або другій похідній від вектора кутового переміщення по часу.

Одиниці виміру в системі СІ, вище приведених параметрів: [φ]=[рад.]; [ω] = [φ / t] = [рад. c^{-1}]; [ε] = [ω / t] = [рад. c^{-2}].

Кутове прискорення також є псевдовектором і має напрямок по осі обертання. Причому при додатному прискоренні, вектори кутової швидкості і кутового прискорення співпадають за напрямком, а при від'ємному прискоренні вони направлені в протилежні сторони (див. рис. 1.8). Для нормального та тангенціального прискорень маємо :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 R\ ; \qquad (1.27)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega \cdot R}{dt} = \varepsilon R\ ; \qquad (1.28)$$

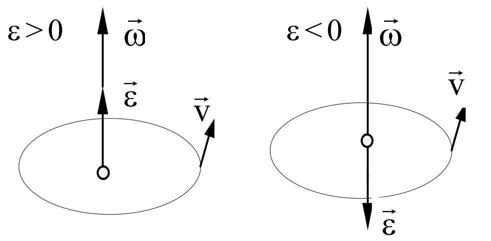

Рис. 1.8.

У випадку рівно змінного руху матеріальної точки по колу (ε = const), маємо:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t\ ; \qquad (1.29)$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}\ ; \qquad (1.30)$$

де ω_0 - початкова кутова швидкість точки.

1.5. Контрольні запитання.

1. Дайте визначення миттєвої швидкості руху матеріальної точки?
2. У чому полягає фізичний зміст нормального та тангенціального прискорень?
3. Що характеризує радіус кривизни траєкторії руху тіла?
4. Що таке ступені свободи механічної системи ?
5. Дайте визначення миттєвого прискорення матеріальної точки ?
6. Дайте визначення кутової швидкості та кутового прискорення матеріальної точки?
7. Яким чином описується рух матеріальної точки?

ГЛАВА 2.
ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1. Маса, сила, імпульс.

Динаміка вивчає рух тіл у взаємозв'язку з причинами, які спричиняють той чи інший характер руху.

Досвід показує, що дія інших тіл на дане тіло спричиняє зміну швидкості його руху, тобто тіло внаслідок цієї дії рухається з прискоренням. Але зміна швидкості наступає не миттєво, а поступово і залежить не тільки від величини сили, але й від властивостей самого тіла (його маси).

Маса тіла - фізичний параметр, який є однією із головних характеристик матерії, що визначає її інерціальні (інертна маса) та гравітаційні (гравітаційна маса) властивості.

Масі тіла притаманні:

1.) Інерція, тобто властивість тіл зберігати свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху.

2.) Гравітація, тобто властивість тіл створювати біля себе гравітаційне поле, завдяки якому усі тіла притягуються одне до одного.

3) Адитивність, тобто маса любого тіла дорівнює сумі мас усіх частинок цього тіла.

За допомогою дуже точних експериментів встановлено, що інертна маса дорівнює гравітаційній масі. І хоч, на теперішній час, ще не зрозуміло, чому ця рівність має місце, треба враховувати цей експериментальний факт, і в подальшому ми будемо говорити просто про масу тіла, не відрізняючи інертну масу від гравітаційної.

В системі СІ маса вимірюється в кілограмах [m] = [кг].

Силою називають векторну величину, яка характеризує міру механічної дії на дане тіло з боку інших тіл чи фізичних полів, внаслідок чого, дане тіло отримує прискорення чи змінює свою форму та розміри. Модуль сили визначає "інтенсивність" її дії, а напрямок дії сили співпадає з напрямком вектора прискорення, яке одержує тіло внаслідок дії цієї сили.

Сукупність матеріальних точок та тіл, що розглядаються як одне ціле, називається механічною системою. Сили взаємодії між матеріальними точками механічної системи, називаються внутрішніми.

Сили з якими на матеріальні точки механічної системи діють зовнішні тіла, називаються зовнішніми. Механічна система на яку не діють зовнішні сили називається замкненою або ізольованою.

Механічна взаємодія може відбуватись як між тілами, що вступають в безпосередній контакт, так і за рахунок фізичних полів. Вимірювання сили може відбуватись статичним шляхом за допомогою пружинного динамометра, або динамічним способом за допомогою порівняння прискорення еталонного тіла під дією відомої сили з прискоренням, що його набуває тіло під дією сили, яка визначається.

В системі СІ сила вимірюється у ньютонах [F] = [кг м $с^{-2}$].

Імпульсом називається вектор P, що дорівнює добутку маси тіла на вектор його швидкості V:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}\ ; \qquad (2.1)$$

де m - маса тіла.

З рівняння (2.1) неважко зробити висновок, що напрямок вектору імпульсу співпадає з напрямком вектору швидкості.

Імпульсом системи тіл є векторна сума імпульсів окремих тіл, що входять до системи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\ ; \qquad (2.2)$$

В системі СІ імпульс вимірюють у таких одиницях [p]=[кг м $с^{-1}$].

2.2. Перший закон Ньютона. Інерціальні системи відліку.

Перший закон Ньютона відповідає на питання, що станеться з тілом, якщо воно перестане взаємодіяти з другими тілами.

Відповідно до самого закону: тіло знаходиться у стані відносного спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, поки дія зовнішніх сил не виведе його з цього стану.

Досвід показує, що перший закон Ньютона виконується не в усіх системах відліку, а тільки в тих, що знаходяться у стані спокою або рухаються рівномірно та прямолінійно одна відносно другої. Такі системи відліку називають інерціальними (див. рис. 2.1 - а). В інерціальних системах всі тіла, що не взаємодіють одне з одним, рухаються прямолінійно і рівномірно або знаходяться у стані спокою.

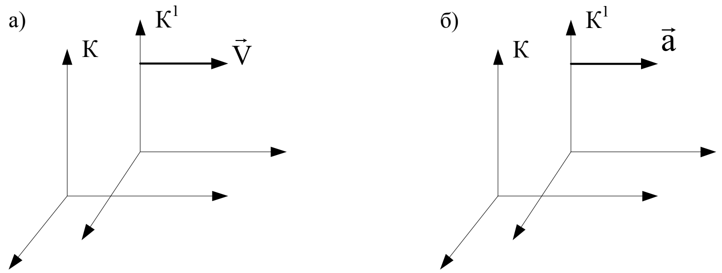

Рис. 2.1.

Системи відліку у яких перший закон Ньютона не виконується отримали назву неінерціальних. Тому всяка система відліку, що рухається з прискоренням, є неінерціальною (див. рис. 2.1-б).

Згідно з принципом відносності Галілея, в механіці всі інерціальні системи відліку рівноправні між собою. Це означає, що в таких системах усі явища протікають однаково, а фізичні закони виконуються без будь-яких змін. Прикладом інерціальної системи відліку є система центр якої співпадає з Сонцем, а осі координат мають напрямки на нерухомі зірки. Така система відліку отримала назву геліоцентрична система. Система відліку, що пов'язана з Землю отримала назву геоцентрична система. Таку систему не можна вважати строго інерціальною, бо вона обертається навколо Сонця, але для більшості фізичних задач цю систему відліку можливо вважати інерціальною.

2.3. Другий закон Ньютона.

Другий закон Ньютона відповідає на питання, як зміниться рух матеріальної точки чи тіла під дією прикладених до них сил.

Згідно з другим законом Ньютона, прискорення, що набуває матеріальна точка під дією зовнішньої сили, співпадає з напрямком її дії та прямо пропорційне відношенню цієї сили до маси точки:

$$\vec{a} = k\,\frac{\vec{F}}{m}\;; \tag{2.3}$$

де k - коефіцієнт пропорційності, що у системі СІ дорівнює одиниці.

Тоді, згідно з (2.3), маємо:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}\;; \tag{2.4}$$

Враховуючи, що прискорення дорівнює першій похідній від швидкості по часу, рівняння (2.4) перетворимо до наступного виду:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}\;; \tag{2.5}$$

При цьому ми врахували, що P = mV, а маса матеріальної точки є величина стала і її можливо вносити під знак похідної. Тоді маємо:

$$\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \vec{F}\;; \tag{2.6}$$

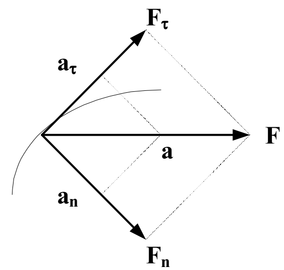

Рис. 2.2.

Отриманий вираз (2.6) є найбільш загальним формулюванням другого закону Ньютона: швидкість зміни імпульсу матеріальної точки з часом дорівнює діючій на неї сили.

Якщо на матеріальну точку водночас діють декілька сил, тоді необхідне застосування принципу незалежності дії сил: кожна з діючих сил надає матеріальній точці таке прискорення, у відповідності з другим законом Ньютона, як би інших сил не існувало.

Тому сили та прискорення можливо розкладати на складові, використання яких приводить до спрощення розв'язування різноманітних фізичних задач (див. рис. 2.2).

2.4. Третій закон Ньютона.

Характер взаємодії між матеріальними точками та тілами визначається третім законом Ньютона.

Згідно з третім законом Ньютона сили, з якими діють одна на одну матеріальні точки чи тіла, завжди рівні по модулю та протилежні за напрямком і діють вздовж прямої, що їх з'єднує.

Тобто:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2\;; \tag{2.7}$$

Одну з цих сил інколи називають силою дії, а другу - силою протидії.

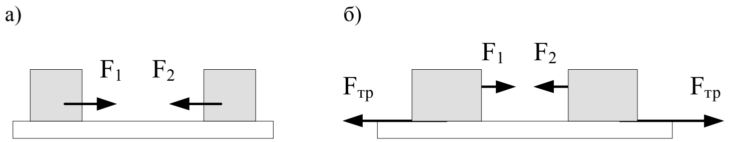

Рис. 2.3.

При використанні законів динаміки завжди треба пам'ятати, що в другому законі Ньютона говориться про прискорення, яке отримує тіло під впливом сил, що прикладаються до нього. Тобто мова йде про <u>одне тіло</u> (див. рис. 2.3 - б). А в третьому законі Ньютона говориться про рівність сил, які прикладені до <u>різних тіл</u> (рис. 2.3 - а).

У замкненій механічній системі , згідно з третім законом Ньютона, сили, що діють між матеріальними точками цієї системи будуть рівними по модулю та протилежні по напрямку, а значить геометрична сума внутрішніх сил завжди дорівнює нулю.

<u>2.5. Закон збереження імпульсу.</u>

Розглянемо замкнену механічну систему, що складається з n тіл, імпульс яких відповідно дорівнює $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ... \vec{p}_n$. Нехай $\vec{F}_k$ - це внутрішня сила, з якою одне тіло діє на друге. Запишемо другий закон Ньютона для кожного з n тіл системи:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 \;; \qquad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 \;;\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_n \;;$$

Зробимо почленне складання вище приведених рівнянь:

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_n)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \;; \qquad (2.8)$$

Тобто похідна по часу від повного імпульсу механічної системи дорівнює векторній сумі внутрішніх сил, що діють у цій системі. Але для замкнутої системи, як ми вже казали, векторна сума внутрішніх сил завжди дорівнює нулю. Тоді маємо:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \;; \qquad (2.9)$$

де $\vec{p}$ - сумарній імпульс тіл, що складають механічну систему.

Згадавши, що похідна від сталої завжди дорівнює нулю, з виразу (2.10) можливо зробити наступний висновок: векторна сума імпульсу замкненої механічної системи з течією часу не змінюється.

$$\vec{p} = \mathrm{const} \;; \qquad (2.10)$$

Одержаний результат якраз і є <u>законом збереження імпульсу: повний імпульсу замкненої системи з течією часу не змінюється.</u>

Тільки зовнішні сили можуть змінити повний імпульс системи .

Закон збереження імпульсу відноситься до самих фундаментальних законів природи, бо він зумовлений цілковитою властивістю простору, а саме його <u>однорідністю.</u>

<u>2.6. Центр мас системи та закон його руху.</u>

<u>Центром мас</u> (центром інерції) механічної системи називається уявлена точка С, положення якої характеризує розподіл мас цієї системи. Центр мас задається за допомогою радіуса-вектора:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{m} \;; \qquad (2.11)$$

де m_i - маса i-ої матеріальної точки у системі; $\vec{r}_i$ - її радіус-вектор;

m - маса усієї механічної системи.

Координати центра мас в декартовій системі координат визначимо з рівняння (2.12), швидкість руху з рівняння (2.13).

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{m} \;; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{m} ; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{m} \;; \qquad (2.12)$$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{p}}{m} \;; \qquad (2.13)$$

Звідки маємо:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}_c \;; \qquad (2.14)$$

Підставимо вираз (2.14) у формулу (2.6) і одержимо рівняння руху центру мас механічної системи:

$$\frac{d}{dt}\left(m \cdot \vec{v}_c\right) = m \cdot \vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \;; \qquad (2.15)$$

де $\vec{a}_c$ - вектор прискорення руху центра мас системи.

Таким чином, центр мас замкненої системи рухається так, як рухається матеріальна точка в якій зосереджена маса всієї системи під дією всіх прикладених до неї сил.

Системи відліку, відносно яких центр мас знаходиться у стані спокою, називають системою центра мас.

З закону збереження імпульсу та рівняння (2.15) можливо зробити висновок: центр мас замкненої системи або рухається прямолінійна і рівномірно, або залишається нерухомим.

2.7. Контрольні запитання.

1. Які дві основні задачі вирішує динаміка ?
2. В яких системах відліку виконуються закони Ньютона ?
3. Сформулюйте усі три закони Ньютона.
4. У чому різниця між інерційною та гравітаційною масою ?
5. Сформулюйте поняття сили в класичній механіці.
6. Наведіть рівняння руху матеріальної точки ?
7. Що характеризує маса тіла ? Які різновиди маси ви знаєте ?
8. Які сили називають внутрішніми, а які зовнішніми ?
9. У чому полягає суть впливу властивостей тіл на прискорення їхнього руху ?
10. Що називають імпульсом матеріальної точки?
11. Чи можуть внутрішні сили викликати зміну сумарного імпульсу механічної системи ?
12. Що таке центр інерції системи матеріальних точок і яке рівняння його руху ?

ГЛАВА 3.
РОБОТА ТА ЕНЕРГІЯ

3.1. Енергія, робота сили, потужність.

Енергія - це універсальна кількісна міра руху та взаємодії усіх без винятку видів матерії. Енергія - величина скалярна. У відповідності з окремими формами руху матерії відповідно відрізняють і різноманітні види енергії: механічну, електромагнітну, хімічну, ядерну і т. д.

Кількісна оцінка процесу обміну енергією між взаємодіючими тілами в механіці проводиться з допомогою параметра, який отримав назву - робота сили.

Нехай тіло, рухаючись, під дією зовнішньої сили, по довільній траєкторії від точки 1 до точки 2, виконало деяку роботу A (див. рис 3.1). Коли діюча на тіло сила неоднакова в різних точках траєкторії руху тіла, тоді весь шлях слід розбити на елементарні відрізки так, щоб на кожному з них силу F_i можливо було б вважати постійною.

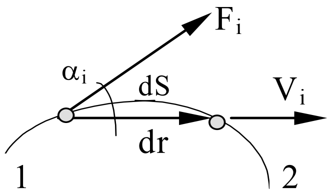

Рис. 3.1.

На цьому елементарному відрізку тіло зробило нескінченно мале переміщення dr, пройшовши при цьому шлях dS. Тоді роботою сили dA на цьому відрізку шляху буде називатися скалярний добуток:

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right); \qquad (3.1)$$

Скориставшись правилом розкриття скалярного добутку, маємо:

$$dA_i = F_i\,|dr|\cos\alpha_i = F_i\, dS \cos\alpha_i\,; \qquad (3.2)$$

де α_i - кут між векторами F_i та dr.

З рівняння (3.2) можливо зробити висновок: якщо $\alpha < \pi/2$, тоді робота сили додатна, якщо $\alpha > \pi/2$, тоді робота сили від'ємна. У випадку, коли $\alpha = \pi/2$, робота сили завжди дорівнює нулю, незалежно від значення сили та шляху пройденого тілом.

Повна робота при переміщенні тіла з точки 1 в точку 2, дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт на всіх нескінченно малих відрізках траєкторії між цими точками і визначається через криволінійний інтеграл виду (3.3).

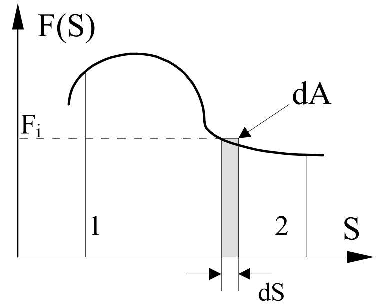

Рис. 3.2.

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 F_i \cos\alpha_i dS; \quad (3.3)$$

Фізичний зміст вище приведеного криволінійного інтегралу полягає у наступному. Елементарну роботу dA можливо представить як площу елементарної трапеції зі сторонами F_i та dS (див. рис. 3.2).

Тоді загальна площа фігури нижче лінії графіка F = F(S), яка обмежена ординатами 1 та 2, дорівнює роботі сили при переміщенні тіла між цими точками, і чисельно визначається з рівняння (3.3).

Потужність - це фізична величина, що визначає швидкість виконання роботи. Середня потужність дорівнює відношенню роботи сили ΔA до проміжку часу Δt за який вона виконана:

$$N_{cp} = \frac{\Delta A}{\Delta t}; \qquad (3.4)$$

Миттєва потужність дорівнює границі середньої потужності при умові, що $\Delta t \to 0$:

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} N_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}; \qquad (3.5)$$

Таким чином, миттєва потужність дорівнює першій похідній по часу від роботи сили.

Одиниці виміру, вище згаданих параметрів, в системі СІ такі. Робота: [A] = [F S] = [Нм] = [Дж]; потужність: [N] = [A/t] = [Дж/с] = [Вт].

3.2. Кінетична енергія тіла.

Кінетична енергія тіла є мірою його механічного руху та визначається роботою, яку необхідно виконати щоб отримати даний стан тіла.

Обчислимо роботу, яку виконує прикладена до тіла масою m сила F, при зміні його швидкості руху від 0 до V (див. рис. 3.3). Згідно з вище приведеним визначенням кінетичної енергії, маємо:

$$dW_k = dA; \qquad (3.6)$$

З виразу (3.3.) визначимо роботу при переміщенні тіла з початкової точки його руху в кінцеву. Для цього використаємо скалярну форму запису другого закону Ньютона та врахуємо, що a = dV/dt.

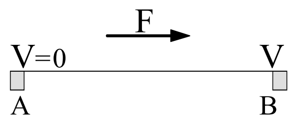

Рис. 3.3.

Тоді з (3.6) отримаємо:

$$dA = F\,dS = m\,a\,dS = m\frac{dV}{dt}dS;$$

Враховуючи, те що dS/dt = dV, маємо:

$$dA = m\,V\,dV;$$

Інтегруємо це співвідношення у межах від 0 до V, та маємо:

$$W_k = \int_0^V dW_k = \int_0^V dA = \int_0^V mVdV = \frac{mV^2}{2}; \qquad (3.7)$$

Таким чином, ми отримали добре нам знайому формулу для обчислення кінетичної енергії поступального руху тіла.

На ґрунті усього вищесказаного, можливо стверджувати: зміна кінетичної енергії тіла дорівнює повній роботі діючих на нього сил:

$$W_2 - W_1 = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r} = A; \qquad (3.8)$$

Враховуючи те, що швидкість тіла залежить від вибору системи відліку, тоді і чисельне значення кінетичної енергії тіла буде неоднакове у різних системах відліку. З виразу (3.7) легко зробить висновок, що кінетична енергія завжди має позитивне значення.

Кінетична енергія має ті ж самі одиниці виміру, що і робота сили.

3.3. Потенціальна енергія тіла.

Взаємодія між тілами може виникати не лише при їхньому безпосередньому контакті. Прикладом неконтактних взаємодій є притягання планет за рахунок гравітаційної взаємодії. Неконтактні взаємодії здійснюються за допомогою силових полів, які являються однією з форм існування матерії. Серед них виділяють так званні потенціальні поля, в яких діють сили, що отримали назву консервативних.

<u>Потенціальними називають такі поля</u> в яких робота діючих сил не залежить від форми траєкторії та закону руху по ній тіла, а визначається його початковим та кінцевим положенням (див. рис. 3.4).

Прикладом консервативних сил можуть бути гравітаційні та електростатичні сили. В протилежному випадку поля називаються <u>не потенціальними</u>, а сили, що в них діють - <u>дисипативними.</u> Характерним прикладом дисипативних сил є сили тертя.

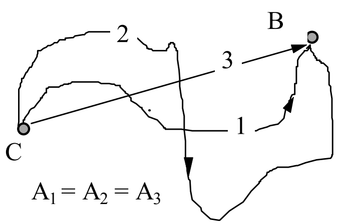

Рис. 3.4.

Роботу консервативних сил можливо уявити у вигляді двох параметрів U_1 та U_2, значення яких залежить від початкового і кінцевого положення тіла:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2 ; \qquad (3.9)$$

Параметр U_i в формулі (3.9) і називається <u>потенціальною енергією тіла</u>.

<u>Потенціальна енергія</u> - це енергія, яка зв'язана з розташуванням тіла відносно до других тіл, що взаємодіють з ним, та визначається роботою, яку необхідно звершити проти консервативних сил потенційного поля, для того щоб перемістити тіло з початкового положення в кінцеве.

Значення потенціальної енергії визначається з точністю до постійного додатка. З фізичної точки зору це означає, що початок відліку потенціальної енергії може бути вибраним довільно. Дійсно, якщо в (3.9) до кожного значення U_1 та U_2 додати довільну постійну величину, то рівність збережеться.

Згідно з визначенням потенціальної енергії, маємо:

$$dA = -dU ; \qquad (3.10)$$

Тобто робота консервативних сил, що прикладені до тіла, здійснюється за рахунок зменшення потенційної енергії цього тіла. З іншого боку сили потенціального поля виконують роботу, що дорівнює:

$$dA = F_X \, dX ; \qquad (3.11)$$

Порівняння двох останніх виразів (3.11) та (3.10) дає:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} ; \qquad (3.12)$$

У випадку руху тіла в просторі, рівняння (3.12) перетворюється до наступного вигляду:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \right) ; \qquad (3.13)$$

Вище приведений оператор, що знаходиться у дужках, називається <u>градієнтом скалярної величини</u>:

$$\text{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} ; \qquad (3.14)$$

Тобто, сила що діє на тіло у потенціальному полі, дорівнює градієнту його потенціальної енергії з протилежним знаком:

$$\vec{F} = -\text{grad}U ; \qquad (3.15)$$

Якщо механічна система складається з декількох тіл то потенціальна енергія такої системи дорівнює скалярній сумі потенціальних енергій окремих тіл цієї системи.

Конкретний вигляд функції П для потенціальної енергії залежить від характеру силового поля.

<u>1). Потенціальна енергія тіла у гравітаційному полі.</u>

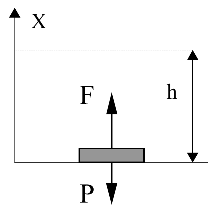

Рис. 3.5.

Нехай тіло масою m завдяки силі F підіймається догори на висоту h (див. рис. 3.5). Сила F здійснює роботу проти сили тяжіння, тобто: F = - P = - mg.

Тоді, згідно з (3.10), маємо:

$$-mg\,dx = -dU ;$$

Інтегруємо це рівняння у границях від 0 до h:

$$U = \int_0^h dU = \int_0^h mg\,dx = mgh ; \qquad (3.16)$$

<u>2). Потенціальна енергія пружно деформованого тіла.</u>

Нехай до стержня, що закріплений одним з кінців, прикладена сила F. Під дією цієї сили стержень пружно деформується (див. рис. 3.6).

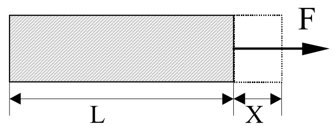

Рис. 3.6.

У цьому випадку сила F здійснює роботу проти сили пружності і дорівнює:

$$F = -F_{упр} = -(-k\,x) ;$$

де x – видовження стержня; k - модуль пружності речовини стержня.

Інтегруємо це співвідношення у межах від 0 до X, та отримаємо:

$$U = \int dU = \int_0^X k\,x\,dx = \frac{kx^2}{2}\,; \qquad (3.17)$$

Зауважимо, що потенціальна енергія може мати як додатне так і від'ємне значення і має такі ж самі одиниці виміру у системі СІ, що й робота.

У цілому можливо сказати, що кінетична енергія це енергія руху, а потенціальна - це енергія взаємодії.

3.4. Закон збереження енергії.

Повною енергією E механічної системи називається сума її кінетичної та потенціальної енергій:

$$E = W_K + U\,; \qquad (3.18)$$

Розглянемо ізольовану механічну систему взаємодіючих між собою тіл, масою m, що під дією сили F рухається з прискоренням a і за час dt пройшла шлях ds.

Згідно з другим законом Ньютона маємо: $F = ma = m\,(dV/dt)$.

Помножимо обидві частини цього рівняння на dx, та враховуючи, що $dx/dt = V$, отримаємо:

$$Fdx = m\frac{dV}{dt}dx = mVdV = d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dW_к\,; \qquad (3.19)$$

Враховуючи, що $Fdx = -\,dU$, маємо:

$$-\,dU = dW_K\,;$$

Звідки:

$$dU + dW_K = d(U + W_K) = 0\,; \qquad (3.20)$$

Враховуючи, що диференціал від сталої завжди дорівнює нулю, з (3.20) робимо висновок:

$$E = W_K + U = const\,; \qquad (3.21)$$

Вираз (3.21) і є законом збереження механічної енергії: *повна механічна енергія ізольованої системи тіл, що знаходиться під дією тільки консервативних сил, не змінюється з часом., тобто залишається постійною.*

Однак завжди слід пам'ятати, що лише загальний запас енергії ізольованої системи лишається без зміни з часом, а енергія кожного окремого тіла може в рівних кількостях передаватися від одного тіла до другого і перетворюватися з одних видів у другі.

При наявності неконсервативних сил повна механічна енергія системи не залишається постійною. Наявність таких неконсервативних сил, як сила тертя, приводить до того, що частина механічної енергії системи перетворюється у внутрішню енергію тіл, тобто приводить до їхнього нагрівання. Такий процес зменшення запасу механічної енергії системи тіл називається дисипацією енергії.

Закон збереження енергії зобов'язаний своєму існуванню такій властивості Всесвіту, як однорідність часу, тобто рівнозначності усіх інтервалів часу незалежно від моменту вимірювання.

3.5. Удар. Абсолютно пружні та непружні удари.

Ударом називають процес короткочасної взаємодії тіл, що призводить до зміни їх руху. Удар протікає протягом 10^{-2} - 10^{-8} с. Суть удару полягає у тому, що кінетична енергія тіл, які рухались до удару, перетворюється у потенціальну енергію їх пружного деформування, а потім відбувається зворотне перетворення потенціальної енергії деформування у кінетичну енергію руху. В залежності від характеру деформування тіл при ударі розрізняють два граничні види ударів.

Абсолютно пружним ударом називають такий удар, після якого виникла в тілах пружна деформація повністю щезає. При абсолютно непружному ударі деформація тіл стає повністю незворотною.

Лінією удару називають пряму, що співпадає з нормаллю до поверхонь тіл у точці їх торкання при ударі. Удар називають центральним, якщо лінія удару проходить через центри мас тіл, що ударяються. Якщо вектори швидкостей руху тіл до удару лежать на лінії удару, то удар буде прямим, а в іншому випадку - косим.

Відношення нормальних складових відносної швидкості тіла після удару V^1 до відносної швидкості тіла до удару V, отримало назву коефіцієнта відновлювання ε.

$$\varepsilon = \frac{V^1}{V}\,; \qquad (3.22)$$

Якщо $\varepsilon = 0$, тоді удар є абсолютно непружним, а якщо $\varepsilon = 1$ - удар абсолютно пружний. При зіткненні тіл, що виготовлені з реальної речовини, значення коефіцієнту відновлювання знаходиться у межах $0 < \varepsilon < 1$.

1). Абсолютно пружний удар.

Розглянемо випадок центрального абсолютно пружного удару двох однорідних тіл масами m_1 та m_2, що рухались до зіткнення зі швидкостями V_1 і V_2, а після зіткнення - з швидкостями U_1 і U_2 (див. рис. 3.7).

У випадку абсолютно пружного удару виконуються закони збереження імпульсу та енергії:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \ ; \qquad (3.23)$$

$$\frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2} = \frac{m_1\vec{u}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{u}_2^{\,2}}{2} \ ; \qquad (3.24)$$

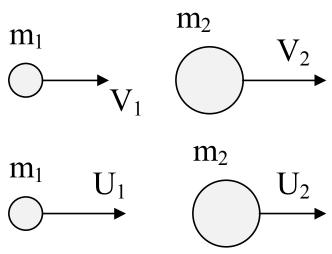

Рис. 3.7.

Сумісне вирішення рівнянь (3.23) та (3.24) дає можливість одержати формулу для розрахунку швидкості тіл після удару:

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \ ; \qquad (3.25)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \ ; \qquad (3.26)$$

Проаналізуємо отримані вирази.

Розглянемо випадок коли друге тіло до абсолютно пружного удару не рухалось, тобто $V_2 = 0$. Тоді формули (3.25) і (3.26) трансформуються до наступного виду:

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \ ; \qquad (3.27)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \ ; \qquad (3.28)$$

Припустимо, що маси тіл однакові, тобто $m_1 = m_2$ (наприклад більярдні кулі), тоді з формул (3.27) і (3.28) маємо:

$$U_1 = 0 \ ; \quad \text{та} \quad U_2 = V_1 \ ;$$

Тобто, у випадку абсолютно пружного удару, перша куля після зіткнення зупиниться, а друга, що була до цього нерухомою, почне рухатись з швидкістю та напрямком, які були у першої кулі перед ударом.

Далі припустимо, що $m_2 >> m_1$ (наприклад удар більярдної кулі об стінку), тоді з формул (3.27) і (3.28) маємо:

$$U_1 = - V_1 \ ; \quad \text{та} \quad U_2 \approx 0 \ ;$$

Тобто, більярдна куля після абсолютно пружного удару об стінку, буде рухатися з тією ж швидкістю, але у протилежному напрямку.

2). Абсолютно непружний удар.

Розглянемо випадок центрального абсолютно непружного удару двох однорідних тіл масами m_1 та m_2, що рухались до зіткнення зі швидкостями V_1 і V_2. В результаті обидва тіла після удару будуть рухатись як одне ціле з масою, що дорівнює $m_3 = m_2 + m_1$, та швидкістю U (див. рис. 3.8).

Закон збереження імпульсу для абсолютно непружного удару у даному випадку матиме такий вигляд:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u} \ ;$$

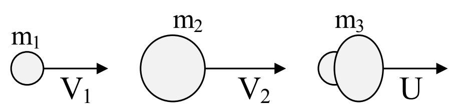

Рис. 3.8.

Звідки неважко визначити швидкість руху тіл після удару:

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \ ; \qquad (3.29)$$

Таким чином, після абсолютно непружного удару нове тіло буде рухатися у напрямку в якому рухалось тіло, що мало більший імпульс до зіткнення.

Втрата сумарної кінетичної енергії тіл при непружному ударі, що витрачається на їх деформацію та зміну внутрішньої енергії, отримала назву робота деформації $A_Д$. Тоді маємо:

$$A_Д = W_1 + W_2 - W_3 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)U^2 \ ;$$

Або:

$$A_Д = \frac{m_1\ m_2}{2(m_1 + m_2)}\left(V_1 - V_2\right)^2 ; \qquad (3.30)$$

Проаналізуємо отриманий вираз.

Якщо $V_2 = 0$, тобто друге тіло до удару було нерухомим, тоді швидкість тіл після непружного удару U та робота деформації $A_Д$ можуть буди визначені з наступних виразів:

$$\vec{u} = \frac{m_1\ \vec{V}_1}{m_1 + m_2}; \qquad A_Д \approx \frac{m_2}{m_1 + m_2}W_1 ; \qquad (3.31)$$

де W_1 - кінетична енергія першого тіла до удару.

Аналіз виразів (3.31) показує, що у випадку коли $m_2 >> m_1$ (наприклад ковка заліза молотом) маємо $A_Д \approx W_1$, тобто уся кінетична енергія молота витрачається на роботу деформування поковки.

У випадку коли $m_1 >> m_2$ (наприклад забивання цвяхів молотком) маємо $A_Д \approx 0$, тобто уся кінетична енергія від першого тіла передається другому і витрачається на його переміщення.

3.6. Контрольні запитання.

1. Як у загальному випадку визначається робота сили?
2. При яких умовах сила, що прикладена до тіла, не виконує роботи?
3. Чи залежить кінетична енергія тіла від вибору системи відліку?
4. Що таке потенціальна енергія?
5. Які сили являються консервативними, а які неконсервативними?
6. Який зв’язок консервативної сили з потенціальною енергією?
7. Чому дорівнює потенціальна енергія пружно деформованого тіла?
8. Що називається повною механічною енергією тіла?
9. Як формулюється закон збереження повної механічної енергії?
10. Сформулюйте визначення коефіцієнта відновлювання ?
11. Дайте визначення абсолютно пружного та абсолютно непружного удару.

ГЛАВА 4.

СИЛИ В МЕХАНІЦІ

4.1 Деформування твердих тіл. Сили пружності.

Вище було дано поняття абсолютно твердого тіла, але у природі таких тіл не буває. Усі реальні тіла під дією сил змінюють свою форму та розміри, тобто деформуються. Якщо після закінчення дії сили тіло набуває початкових розмірів та форми, то таке тіло називають пружним, а таку деформацію пружною. Деформації які зберігаються у тілі після закінчення дії зовнішніх сил отримали назву пластичних.

Усі види пружних деформацій можуть бути зведені до трьох видів: розтягнення, стискання та зсув (див. рис. 4.1).

Сила, діюча на одиницю площі поперечного перерізу S отримала назву механічної напруги σ:

$$\sigma = \frac{F}{S} ; \qquad (4.1)$$

Якщо сила спрямована по нормалі до поверхні, то механічна напруга називається нормальною, а якщо по дотичній - тангенціальною.

Кількісною мірою, яка характеризує рівень деформації тіла, є його поперечні Δd та поздовжні ΔL абсолютні деформації.

Відношення абсолютної деформації до початкового розміру зразка, отримало назву відносна поперечна $\varepsilon_\perp$ та відносна подовжня $\varepsilon_\parallel$ деформації, які визначаються з виразу (4.2).

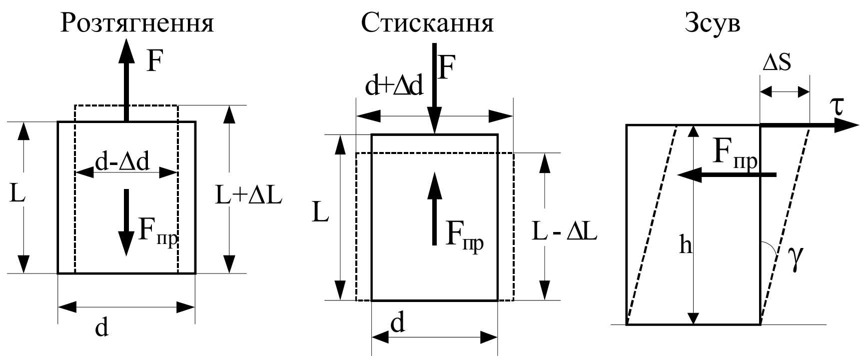

Рис. 4.1.

$$\varepsilon_{\|} = \Delta L / L \; ; \qquad \varepsilon_{\perp} = \Delta d / d \; ; \qquad (4.2)$$

Відношення поперечної $\varepsilon_{\perp}$ деформації до поздовжньої $\varepsilon_{\|}$ називається коефіцієнтом Пуасона μ:

$$\mu = - \varepsilon_{\perp} / \varepsilon_{\|} \; ; \qquad (4.3)$$

Теоретичні значення коефіцієнта Пуасона, за винятком гуми, знаходяться у межах: $0 < \mu < 0{,}5$. Знак "-" у формулі (4.3) означає, що поперечна та поздовжня деформації завжди мають протилежний напрямок (див. рис. 4.1).

Згідно з законом Гука *відносна деформація тіла прямо пропорційна прикладеній до нього механічній напрузі*:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \; ; \qquad (4.4)$$

де E - модуль пружності Юнга, Па.

З виразу (4.4) видно, що модуль пружності Юнга за фізичним змістом являє собою таку механічну напругу, яку необхідно прикласти до тіла, аби його відносна деформація стала рівною одиниці.

Внутрішні сили, що чинять опір зовнішнім силам при деформуванні твердих тіл отримали назву пружних сил. Відповідно з третім законом Ньютона пружна сила $F_{пр}$ завжди рівна по модулю та протилежна за напрямком значенню зовнішньої сили $F_{зов}$. Тобто:

$$F_{пр} = - F_{зов} \; ; \qquad (4.5)$$

Сили пружності виникають у всьому об'єму тіла, що деформується і не залежать від його розмірів. Визначимо значення пружної сили. Використовуючи вирази (4.1) та (4.2), з закону (4.4) маємо:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{S\,E} \; ;$$

Тоді з урахуванням (4.5) отримаємо:

$$F_{пр} = -F = -(ES/L)\,\Delta L = -k\,\Delta L \; ; \qquad (4.6)$$

де $k = ES/L$ - коефіцієнт пружності твердого тіла, Н/м.

Коефіцієнт пружності суттєво залежить від геометричних розмірів тіла. Так, якщо довжину тіла зменшити у два рази, то його коефіцієнт пружності, згідно з виразом (4.6), збільшиться вдвічі і навпаки.

Розглянемо більш детально деформацію зсуву (див. рис 4.1). Під дією тангенціальної напруги τ, прикладеної вздовж верхньої грані, тіло деформується на деякий кут зсуву γ:

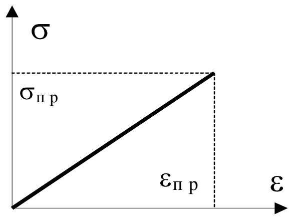

Рис. 4.2.

$$\gamma \approx tg\gamma = \Delta S / h \; ;$$

Згідно з законом Гука, *кут зсуву прямо пропорційний тангенціальній напрузі, що визвала цей зсув*:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \; ; \qquad (4.7)$$

де G - модуль зсуву, Па.

З виразу (4.7) видно, що модуль зсуву за фізичним змістом являє собою таку тангенціальну напругу, при якій кут зсуву дорівнював одному радіану.

Чисельні значення параметрів E і G визначаються експериментально. Деформації реальних твердих тіл підпорядковуються закону Гука тільки до відомої межі, яка отримала назву границя міцності $\sigma_{пр}$.

При механічній напрузі, що дорівнює рівню міцності, наступає руйнування матеріалу (див. рис. 4.2).

У системі СІ механічна напруга вимірюється у паскалях: $[\sigma, \tau] = [Н/м^2] = [Па]$; кут зсуву у радіанах $[\gamma] = [рад.]$; абсолютна деформація у метрах $[\Delta L, \Delta d] = [м]$; відносна деформація $[\varepsilon]$ - параметр без розміру.

4.2. Сили тертя.

Сили тертя - це сили опору, які завжди направлені у бік протилежний напрямку руху тіл та співпадають з дотичною до поверхні тіл, що стикаються (див. рис. 4.3). Сили тертя виникають тільки за умови взаємного контактування тіл, рідини чи газів.

Відрізняють зовнішнє (сухе) та внутрішнє (рідинне) тертя.

Зовнішнє тертя виникає між поверхнями двох твердих тіл, що контрактують між собою. Виникнення сухого тертя можливо пояснити існуванням на поверхні тіл виступів та нерівностей, які проникають одне в одне. Зчеплення нерівностей і викликає у підсумку силу тертя.

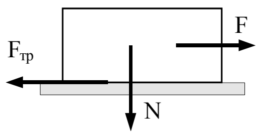

Рис. 4.3.

У випадку зовнішнього тертя, в залежності від характеру руху тіл, відокремлюють силу тертя спокою (виникає при умові нерухомості тіл, що стикаються), силу тертя ковзання та силу тертя кочення.

До граничного значення сила тертя завжди дорівнює значенню зовнішньої сили, що збурює рух тіла:

$$F_{тр} = - F \; ; \qquad (4.8)$$

Значення граничної зовнішньої сили тертя визначається за формулою Амонтона-Кулона:

$$F_{тер.} = k\,N \; ; \qquad (4.9)$$

де N - сила нормального тиску; k - коефіцієнт тертя спокою.

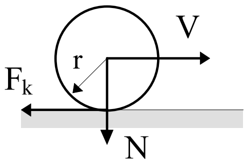

Рис. 4.4.

Сила тертя кочення (див. рис. 4.4) прямо пропорційна нормальній силі N, що притискує тіло до поверхні, і обернено пропорційна радіусу тіла R, що котиться:

$$F_к = \mu \frac{N}{R} \; ; \qquad (4.10)$$

де μ - коефіцієнт тертя кочення, м.

Коефіцієнти тертя кочення значно менші від коефіцієнтів тертя ковзання, в зв'язку з чим у пристроях та машинах намагаються тертя ковзання змінити тертям кочення. Коефіцієнти тертя спокою завжди більше ніж коефіцієнти тертя кочення та ковзання. Загалом тертя ковзання та кочення називають кінематичним тертям.

Зовнішнє рідинне (в'язке) тертя виникає за умови руху тіла в рідині чи газі. Ця сила тертя складається з сили в'язкого тертя та сили опору речовини. Характерною відзнакою рідинного тертя є те, що воно суттєво залежить від швидкості руху тіла і визначається з наступного виразу:

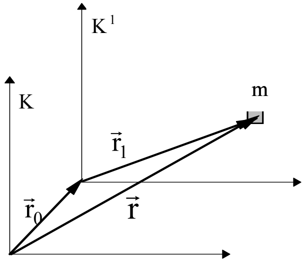

Рис. 4.5.

$$F_{тр} = - k_1 V^n \; ; \qquad (4.11)$$

де k_1 - коефіцієнт опору, який залежить від розмірів і форми поверхні тіла; V - швидкість руху тіла; n - показник ступеня, який суттєво збільшується при зростанні швидкості руху тіла.

4.3. Сили інерції.

Як ми вже підкреслювали, закони Ньютона виконуються тільки в інерціальних системах відліку. Але і в неінерціальних системах відліку можливо використовувати закони динаміки, врахувавши сили інерції.

Розглянемо дві системи відліку інерціальну К та неінерціальну $К^1$, яка рухається відносно першої з деяким прискоренням (див. рис 4.5).

Радіус-вектор точки масою m дорівнює: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1$. Подвійне диференціювання по часу цього співвідношення дає:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \; ; \qquad (4.12)$$

де a - прискорення точки відносно інерціальної системи К; a_0 - прискорення неінерціальної системи $К_1$ відносно інерціальної системи К; a_1 - прискорення точки відносно неінерціальної системи $К_1$.

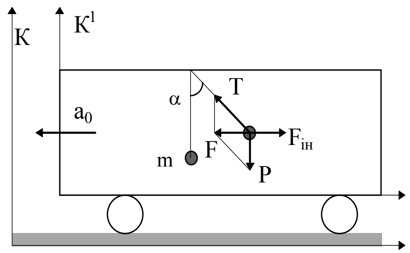

Рис. 4.6.

Помножимо рівняння (4.12) на масу точки m, та отримаємо:

$$m\vec{a} = m\vec{a}_0 + m\vec{a}_1 \; ;$$

Візьмемо до уваги, що у відповідності з II законом Ньютона, добуток ma дорівнює силі F. Тоді:

$$m\vec{a}_1 = m\vec{a} - m\vec{a}_0 = \vec{F} + \vec{F}_{ін} \; ;$$

Значить у системі $К_1$ на матеріальну точку, окрім звичайної сили F, діє деяка додаткова сила $F_{ін}$, яка є силою інерції і може бути визначена з наступного рівняння:

$$\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}_0 \; ; \qquad (4.13)$$

На відміну від реальної сили F, для сили інерції $F_{ін}$ неможливо вказати тіло з боку якого вона діє на конкретну матеріальну точку чи тіло. Наприклад при гальмуванні транспорту ми відчуваємо силу, що штовхає нас вперед, але ми не можемо сказати, як і що нас штовхає.

Введення сил інерції дає можливість користуватись законами Ньютона і у випадку руху тіл в неінерційних системах відліку. Але конкретний вигляд формул для визначення сил інерції залежить від характеру руху неінерціальної системи відліку. Розглянемо ці випадки.

1). Сила інерції у випадку прискореного поступального руху системи відліку.

Нехай у вагоні поїзда, що рухається відносно Землі з постійним прискоренням a_0 висить на нитці кулька. З практики відомо, що при рушенні вагона з прискоренням, кулька відхиляється від положення рівноваги, яке вона займала, коли вагон був нерухомий (див. рис. 4.6).

Відхилення кульки від положення рівноваги зупиниться за умови:

$$F = - F_{ін} ; \quad (4.14)$$

Переходячи до числових значень віще приведених сил, маємо:

$$m\,g\,tg\alpha = m\,a_0 ;$$

Звідки:

$$tg\alpha = a_o / g ; \quad (4.15)$$

Таким чином, кут, на який відхиляється кулька, тим більший, чим більше прискорення вагону.

2). Сила інерції, яка діє на нерухоме тіло у системі відліку, що обертається.

Нехай до краю диска, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, підвішена на нитці кулька. З практики відомо, що при цьому кулька відхиляється від положення рівноваги, яке вона займала, коли диск не обертався (див. рис. 4.7). Це відхилення відбувається під дією сили інерції, яка отримала назву відцентрова сила інерції.

Відхилення кульки від положення рівноваги зупиниться при умові рівності відцентрової сили інерції силі скочування:

$$F_{вц} = - F_{ск} ; \quad (4.16)$$

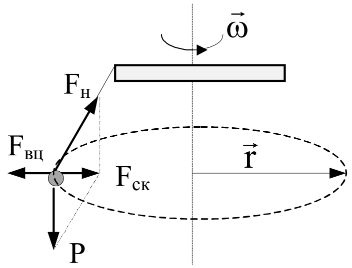

Рис. 4.7.

Сила скочування $F_{ск}$ дорівнює:

$$F_{ск} = m\,a_n = m\,\omega^2\,r ;$$

де a_n - нормальне прискорення; m , r - маса та радіус обертання кульки.

Звідки маємо:

$$F_{вц} = -m\omega^2 r ; \quad (4.17)$$

Або у векторній формі:

$$\vec{F}_{ВЦ} = m\,\omega^2\,\vec{r} ; \quad (4.18)$$

Таким чином, на тіло, що обертається навколо осі з деякою кутовою швидкістю, діє відцентрова сила інерції, яка визначається з вище приведеного виразу. Вектор відцентрової сили інерції має напрям по горизонталі від осі обертання.

3). Сила інерції, яка діє на рухоме тіло у системі відліку, що обертається.

До цього нами розглядались випадки, коли тіло було нерухоме в системі відліку, що обертається. У випадку рівномірного руху тіла

відносно системи відліку, що обертається, на нього буде діяти сила інерції, яка отримала назву сила Коріоліса. Ця сила дорівнює векторному добутку кутової та лінійної швидкостей тіла і визначається з наступного рівняння:

$$\vec{F}_K = 2m\left[\vec{V}\ \vec{\omega}\right] ; \quad (4.19)$$

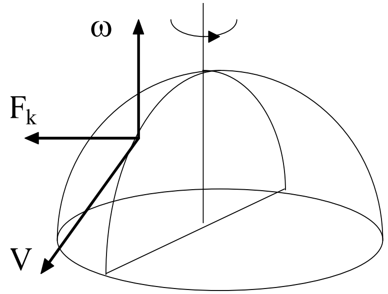

Рис. 4.8.

де m - маса тіла.

Дією сили Коріоліса пояснюються ряд природних явищ на Земній кулі. Так у всіх річок північної півкулі, що течуть вздовж меридіана на південь, більш підмитий лівий берег, а що течуть на північ - правий. Це пояснюється дією сили Коріоліса, яка зумовлює відхилення мас води у відповідну сторону (див. рис. 4.8).

На основі всього вище приведеного, основний закон динаміки для тіла, що рухається в неінерціальній системі відліку, можливо представити у наступному вигляді:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} + \vec{F}_{in} + \vec{F}_{вц} + \vec{F}_к ; \quad (4.20)$$

Ще раз підкреслимо: сили інерції викликані не взаємодією тіл, а прискореним рухом системи відліку. Тому поява сил інерції свідчить про те, що система відліку рухається з прискоренням. Сили інерції завжди є зовнішніми, тому в неінерційних системах відліку не виконуються закони збереження енергії, імпульсу та т. і.

4.4. Контрольні запитання.

1. Які деформації називають пружними і які непружними?
2. Що стверджує закон Гука і у яких межах він виконується?
3. У чому полягає фізичний зміст модуля Юнга?
4. Сформулюйте закон Амонтона - Кулона.
5. Чому дорівнює сила інерції у випадку прискореного поступального руху тіла.
6. Чому дорівнює відцентрова сила інерції ?
7. Які властивості притаманні силі інерції?
8. Що таке сила Коріоліса? Коли вона виникає ?

ГЛАВА 5.
ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

5.1. Момент сили.

Моментом сили відносно точки О називається фізична величина, яка дорівнює векторному добутку радіус-вектора **r**, проведеного від точки О до точки прикладання сили F, на саму цю силу. Тобто:

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] ; \qquad (5.1)$$

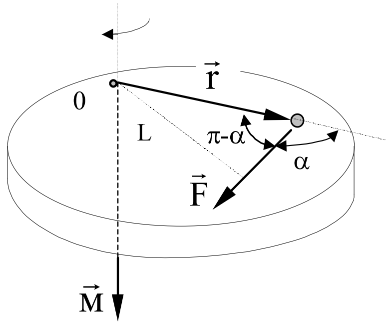

Рис. 5.1.

де: **M** - вектор моменту сили.

Вектор моменту сили нормальний до площини вектора сили та радіуса-вектора і визначається за правилом правого гвинта (див рис. 5.1).

Якщо правий гвинт розмістити нормально до площини, в якій знаходяться вектори і обертати його за годинниковою стрілкою, то напрямок поступального руху гвинта і вкаже на напрямок вектора моменту сили.

Розкриємо векторний добуток (5.1) і отримаємо модуль вектора моменту сили:

$$M = r\,F \sin\alpha = r\,F \sin(\pi-\alpha) = F\,L ; \qquad (5.2)$$

де L - плече сили F, тобто найкоротша відстань між лінією дії сили і точкою обертання; α - кут між векторами **r** та **F**.

Одиниця виміру моменту сили в системі СІ: [M] = [F L] = [Н м].

5.2. Момент інерції. Теорема Штейнера.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання називається скалярна величина, що дорівнює добутку маси точки m на квадрат її відстані до осі обертання r:

$$J = m\,r^2 ; \qquad (5.3)$$

Розглянемо механічну систему, яка обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі Z (див. рис. 5.2). Моментом інерції J механічної системи, відносно осі обертання, називають скалярну величину,

що дорівнює сумі добутку мас усіх тіл, які входять в систему, на квадрат їх відстані до осі обертання і визначають з наступного рівняння:

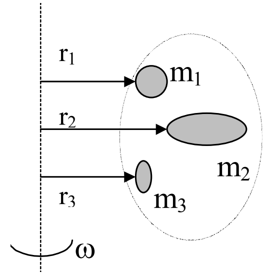

Рис. 5.2.

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 ; \qquad (5.4)$$

У випадку неперервного розподілу маси тіла, сума (5.4) перетворюється до інтегралу наступного виду:

$$J = \int_0^V r^2\,dm ; \qquad (5.5)$$

де V - об'єм тіла.

Обчислення інтегралу виду (5.5), як правило, є нелегким завданням. Але для ряду геометричних фігур моменти інерції, за допомогою формули (5.5), визначені. Приведемо деякі з них.

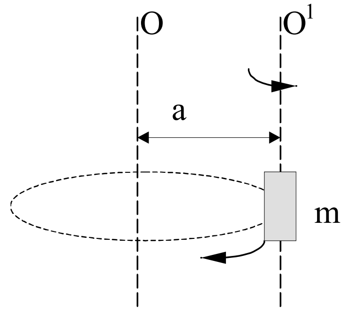

Рис. 5.3.

Однорідний циліндр. Вісь Z проходить вздовж осі циліндра:

$$J_z = {}^1\!/_2\, mr^2 ; \qquad (5.6)$$

Тонкий однорідний стержень. Вісь Z перпендикулярна осі стержня і проходить через його середину.

$$J_z = {}^1\!/_{12}\, mL^2 ; \qquad (5.7)$$

Однорідна куля. Вісь Z проходить через центр кулі:

$$J_z = {}^2\!/_5\, mr^2 ; \qquad (5.8)$$

де m, r, L - маса, радіус та довжина відповідної геометричної фігури.

Якщо тіло одночасно бере участь у кількох обертальних рухах (див. рис. 5.3), то його момент інерції визначається за допомогою теореми Штейнера*: момент інерції тіла J відносно будь-якої осі обертання, дорівнює сумі моменту інерції J_C відносно осі яка паралельна даній і проходить через центр мас тіла, та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями:*

$$J = J_c + md^2 ; \qquad (5.9)$$

де m - маса тіла; d - відстань між осями.

Момент інерції при обертальному русі має той же фізичний зміст, що й маса тіла при його прямолінійному русі.

Одиниця виміру моменту інерції в системі СІ: $[J] = [mr^2] = [кг\ м^2]$.

5.3. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу.

Моментом імпульсу L матеріальної точки відносно нерухомої точки О називається векторний добуток радіуса-вектора r, що проведений з точки О, на імпульс P цієї матеріальної точки. Тобто:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}\cdot\vec{P}\right] = \left[\vec{r}\cdot m\vec{V}\right]\ ; \qquad (5.10)$$

Вектор моменту імпульсу нормальний до площини вектора швидкості та радіуса-вектора і визначається за правилом правого гвинта. Модуль вектора моменту імпульсу матеріальної точки дорівнює:

$$L = r\,p\,\sin\alpha\ ; \qquad (5.11)$$

де α - кут між радіус-вектором і вектором імпульсу (див. рис. 5.4).

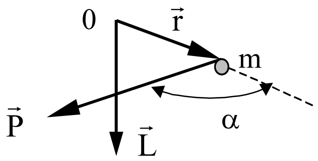

Рис. 5.4.

Моментом імпульсу твердого тіла відносно осі обертання є сума моментів імпульсу окремих часток цього тіла:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_i\vec{r}_i\ ; \qquad (5.12)$$

При рівномірному обертанні тіла $\omega = const$, кут між векторами r та P завжди дорівнює 90^0 і виконується співвідношення $V = \omega r$.

Тоді формулу (5.12) можливо перетворити до наступного вигляду:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\omega}\, r_i^2 = \vec{\omega}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \vec{\omega} J\ ;$$

І у підсумку маємо:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}\ ; \qquad (5.13)$$

Таким чином, момент імпульсу твердого тіла, відносно деякої осі, дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї ж осі на його кутову швидкість.

Одиниця виміру моменту імпульсу: $[L] = [J\omega] = [mr^2\omega] = [кгм^2\ с^{-1}]$

З метою вивчення поведінки моменту імпульсу, диференціюємо рівняння (5.10) по часу як складну функцію і отримаємо:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}\cdot m\vec{V}\right] = \left[\vec{r}\cdot m\frac{d\vec{V}}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot m\vec{V}\right];$$

Враховуючи те, що $m(dV/dt) = F$, а $dr/dt = V$, тоді, вище приведене співвідношення, можливо перетворити до такого вигляду:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right] + \left[\vec{V}\cdot m\vec{V}\right];$$

Перший доданок у правій частині цього виразу є момент сили, що прикладена до тіла, а другий доданок - це векторний добуток колінеарних векторів, який дорівнює нулю. Внаслідок цього маємо:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right] = \vec{M}\ ; \qquad (5.14)$$

Таким чином, швидкість зміни з часом моменту імпульсу дорівнює моменту сили, що діє на тіло.

У загальному випадку, під $\vec{M}$ у рівнянні (5.14), слід розуміти суму моментів внутрішніх і зовнішніх сил, які діють на тверді тіла, що входять до системи. Але сума моментів внутрішніх сил для будь-якої системи тіл завжди дорівнює нулю, бо згідно з третім законом Ньютона ці сили попарно урівноважують одна одну. Тому, якщо система ізольована, то права частина у рівнянні (5.14) дорівнює нулю. Тобто:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0\ ; \qquad (5.15)$$

Як наслідок цього можна стверджувати, що в ізольованій системі вектор моменту імпульсу не змінюються з часом:

$$\vec{L} = const\,; \qquad (5.16)$$

Вираз (5.16) представляє собою закон збереження моменту імпульсу: *сумарний момент імпульсу в ізольованій механічній системі з часом не змінюється.*

Закон збереження моменту імпульсу зобов'язаний своєму існуванню такій властивості простору, як його ізотропність. Ізотропність простору означає рівнозначність його фізичних властивостей у будь-якому напрямку.

5.4. Кінетична енергія тіла, що обертається.

Розглянемо питання про кінетичну енергію тіла, що обертається навколо деякої осі. Для цього розіб'ємо тверде тіло на елементарні об'єми з елементарними масами m_i, які знаходяться на відстані r_i від осі обертання. Так як ми розглядаємо абсолютно тверде тіло, то кутова швидкість усіх елементарних мас тіла буде однакова (див. рис. 5.5).

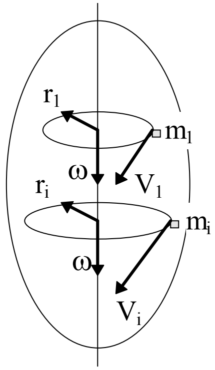

Рис. 5.5.

Для будь-якої елементарної маси, лінійну швидкість її руху можливо визначить таким чином: $v_i = r_i\omega$; тоді її кінетична енергія буде дорівнювати:

$$W_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}; \qquad (5.17)$$

Кінетична енергія всього тіла складається з кінетичної енергії окремих його частин, через що отримаємо:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 ;$$

Тоді, з урахуванням виразу (5.4), отримаємо формулу для визначення кінетичної енергії тіла, що обертається:

$$W = \frac{J\omega^2}{2}; \qquad (5.18)$$

Якщо тіло одночасно приймає участь у обертальному та поступальному рухові, його кінетична енергія W буде дорівнювати:

$$W = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2} \quad ; \qquad (5.19)$$

де J - момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр маси тіла; m - маса тіла; ω, V - кутова та лінійна швидкість тіла.

5.5. Основне рівняння динаміки обертального руху.

Знайдемо роботу, яку виконує зовнішня сила при обертанні абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі. Нехай за час dt, під дією сили F, абсолютно тверде тіло повернеться на кут dφ (див. рис. 5.6).

Тоді довжина шляху, який пройшла точка за цей час, буде дорівнювати: $dS = r_i\, d\varphi$. Елементарну роботу по обертанню тіла на нескінченно малий кут dφ, можливо визначити таким чином:

$$dA = F\cos(90-\alpha)\, dS = F r_i \sin\alpha\, d\varphi = FL\, d\varphi \; ;$$

Але FL = M - це модуль моменту сили, що діє на тіло. Тоді:

$$dA = M\, d\varphi \; ; \qquad (5.20)$$

З другого боку зовнішня робота при обертанні тіла йде на зріст його кінетичної енергії, тобто:

$$dA = dW = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega\, d\omega \; ; \qquad (5.21)$$

Значення роботи не залежить від способу її визначення, тому маємо право порівняти праві частини у рівняннях (5.20) та (5.21):

$$M\, d\varphi = J\omega\, d\omega \; ; \quad (5.22)$$

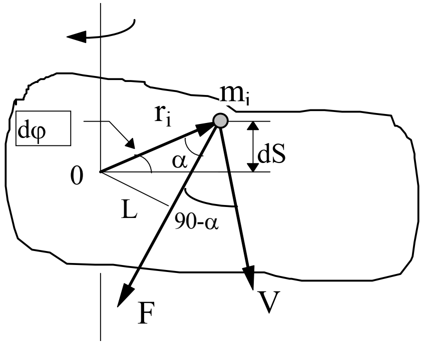

Рис. 5.6.

Поділимо обидві частини вище приведеного рівняння на dt та отримаємо:

$$M\frac{d\varphi}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{dt} \; ; \quad (5.23)$$

Враховуючи, те що: ω=dφ/dt, та ε=dω/dt, з вище приведеного рівняння маємо:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon} \; ; \qquad (5.24)$$

Таким чином, <u>момент сили, що діє на тіло, дорівнює добутку моменту інерції тіла на його кутове прискорення.</u>

Рівняння (5.24) отримало назву: <u>основне рівняння динаміки обертального руху тіла.</u>

Формула (5.24) аналогічна по суті другому закону Ньютона для поступального руху твердого тіла. При цьому функцію маси тіла при обертальному рухові виконує момент інерції тіла, функцію лінійного прискорення - кутове прискорення, а функцію сили - момент сили.

5.6. Гіроскоп. Гіроскопічний ефект.

У твердого тіла є три взаємно перпендикулярні осі обертання, що проходять через його центр мас, які не змінюють своєї орієнтації у просторі до тих пір, поки на тіло не подіють зовнішні сили. Ці осі обертання отримали назву вільних. Як правило вільні осі тіла співпадають з осями їх симетрії. Масивне тіло, яке обертається, з великою кутовою швидкістю, навколо однієї з вільних осей отримало назву гіроскопа.

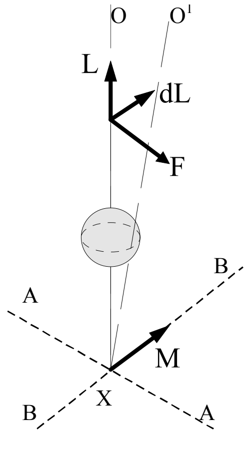

Рис. 5.7.

Якщо гіроскоп обертається навколо своєї вільної осі, то його момент сили тяжіння буде дорівнювати нулю. Тоді, згідно з (5.14) та (5.15), момент імпульсу, а значить і кутова швидкість гіроскопа не буде змінюватись з часом, тобто: $L = J\omega = const$. Це значить, що теоретично гіроскоп буде обертатись навколо своєї вільної осі довічно.

Розглянемо, як буде реагувати гіроскоп, що обертається навколо осі XO, якщо на нього подіє деяка зовнішня сила F (див рис. 5.7). У цьому разі гіроскоп повернеться не навколо осі BB, а навколо осі AA. Це трапляється тому, що згідно з виразом (5.14) за час dt гіроскоп масою m отримає момент імпульсу dL:

$$d\vec{L} = \vec{M}\,dt \;; \tag{5.25}$$

Тобто напрямок вектора dL співпадає з напрямком вектора моменту сили M. При цьому напрямок вектора M, згідно з виразом (5.1), нормальний до площини вектора сили і визначається за правилом векторного добутку.

Явище відхилення осі гіроскопа у напрямку перпендикулярному напрямку дії збурюючої сили отримало назву гіроскопічного ефекту.

Гіроскопічний ефект приводить до того, що добре розкручена дзиґа не буде перевертатися під дією її сили тяжіння (див. рис. 5.8). Дія сили тяжіння приведе лише до того, що вісь дзиґи почне повертатися описуючи у просторі конус. Такий рух осі дзиґи отримав назву регулярної прецесії. Кутова швидкість регулярної прецесії гіроскопа, при умові, що $\omega_{пр} << \omega$, визначається з формули (5.26).

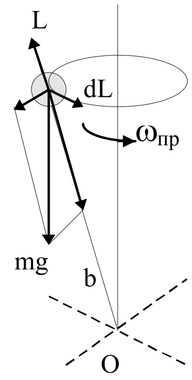

Рис. 5.8.

$$\omega_{пр} = \frac{mg\,b}{J\omega} \;; \tag{5.26}$$

де m - маса дзиґи разом з віссю; ω - її кутова швидкість; J - момент інерції дзиґи; b - відстань від точки опори до центра мас дзиґи.

Якщо гіроскопу надати значну кутову швидкість, то відповідно з виразом (5.14), для зміни орієнтації у просторі його моменту імпульсу, а значить і осі обертання, треба докласти дуже значні зовнішні сили. Таким чином, ось гіроскопа не змінить своєї орієнтації у просторі у разі будь-яких випадкових дій на нього зовнішніх сил. Тому гіроскопи дуже широко застосовуються у авіаційному та космічному приладобудуванні (гірокомпас, гірогоризонт та таке інше). Але саме важливе застосування гіроскопів - у різноманітних пристроях автоматичного керування рухом літаків та ракет. При будь якому випадковому відхиленні ракети від заданого курсу, положення осі обертання гіроскопа, що знаходиться на цій ракеті, не змінюється. А змінює своє положення у просторі тільки підвіска, що утримує гіроскоп. Ці зміни, за допомогою відповідних технічних пристроїв, фіксуються і автоматично вмикаються рулі керування напрямком польоту ракети, котрі і повертають її на заданий курс.

5.7. Контрольні запитання.

1. Як визначається момент сили та момент імпульсу у векторній формі.
2. В чому фізична суть закону збереження моменту імпульсу?
3. Сформулюйте і запишіть теорему Штейнера.
4. Дайте визначення моменту інерції матеріальної точки та моменту інерції твердого тіла?
5. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху тіла.
6. Чому дорівнює кінетична енергія тіла, що обертається?
7. Поясніть фізичний принцип дії гороскопа. Наведіть приклади застосування гіроскопів у техніці.
8. Яким чином визначається кутова швидкість регулярної прецесії гороскопу?

ГЛАВА 6.
ГРАВІТАЦІЯ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.

6.1. Закон всесвітнього тяжіння. Сила ваги та вага.

Сили тяжіння існують навколо усіх матеріальних тіл і зумовлені наявністю у просторі навколо них гравітаційного поля. Наявність гравітаційного поля біля конкретного тіла виявляється по силовій дії цього тіла на друге тіло, розміщене біля нього.

Закон всесвітнього тяжіння, встановлений І.Ньютоном, стверджує, *що кожні дві матеріальні точки притягають одна одну з силою, яка прямо пропорційна добутку мас взаємодіючих точок та обернено пропорційна квадрату відстані між ними:*

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\ ; \qquad (6.1)$$

де m_1, m_2 - маси взаємодіючих матеріальних точок; r - відстань між ними; G - гравітаційна стала, яка дорівнює: 6,67 10^{-11} Н $м^2/кг^2$.

Сила F, що входить до формули (6.1), отримала назву сили тяжіння. Сили тяжіння завжди є силами притягання і спрямовані у протилежні сторони по лінії, що з'єднує взаємодіючі точки (див. рис. 6.1).

Якщо взаємодіючі тіла не відповідають вимогам матеріальної точки, то у цьому разі необхідно умовно поділити їх на елементарні частинки, за допомогою виразу (6.1) розрахувати сили тяжіння між усіма попарно узятими частинками тіл, а далі розрахувати векторну суму усіх цих сил. Однак треба зауважити, що такі розрахунки є вельми складною математичною задачею.

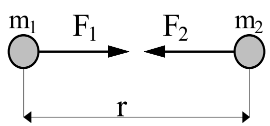

Рис. 6.1.

На тіло, що знаходиться біля Землі діє сила тяжіння, яка дорівнює:

$$F = G\frac{mM}{(R+h)^2}\ ; \qquad (6.2)$$

де: R, M - радіус і маса Землі; m- маса тіла; h - відстань тіла до поверхні Землі.

Під дією сил гравітаційного притягання усі тіла, які знаходяться поблизу Землі, на підставі другого закону Ньютона, починають рухатись з деяким прискоренням, що отримало назву прискорення вільного падіння g.

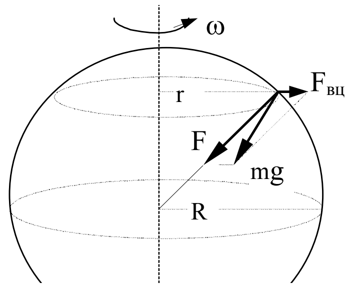

Рис. 6.2.

Сила гравітаційного притягання тіл до Землі отримала назву сила ваги P:

$$P = m\,g\ ; \qquad (6.3)$$

Порівнявши праві частини у рівняннях (6.3) та (6.2), маємо:

$$mg = G\frac{mM}{(R+h)^2}\ ;$$

Звідки:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}\ ; \qquad (6.4)$$

Рівняння (6.4) отримало назву закон Галілея.

Між силою ваги та силою гравітаційного притягання є деяка різниця, яка зумовлена відхиленням Землі від кульової форми з одного боку, та обертанням Землі навколо своєї осі з другого (див. рис. 6.2.). Обертання Земляної кулі приводить до появи відцентрової сили інерції, а значить сила ваги P буде являть собою векторну суму гравітаційної сили F та відцентрової сили $F_{вц}$. За рахунок цього різниця між гравітаційною силою та силою ваги дорівнює нулю на полюсах Земної кулі та досягає максимуму у 0,36 % на екваторі. А прискорення вільного падіння змінюється в межах від 9,78 м/$с^2$ на екваторі до 9,83 м/$с^2$ на полюсах. Значення g = 9,8 м/$с^2$ це стандарт для середніх широт.

Вагою тіла називають силу з якою воно діє, внаслідок гравітаційного притягання, на підвіс чи опору. Вектор ваги тіла, на відміну від вектора сили ваги, прикладається не до самого тіла, а до опори чи підвісу на які вони діють.

Визначимо значення ваги тіл у найбільш поширених випадках.

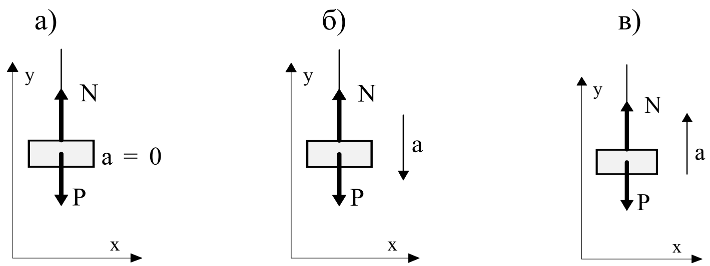

Рис. 6.3.

Якщо прискорення тіла дорівнює нулю (див. рис. 6.3 - а), тоді згідно з другим законом Ньютона, маємо: $-P + N = 0$. Або:

$$N = P = mg\;; \qquad (6.5)$$

Тобто, у випадку, коли тіло покоїться або прямолінійно рівномірно рухається, його вага дорівнює силі ваги.

Якщо прискорення тіла за напрямком співпадає з прискоренням вільного падіння (див. рис. 6.3 - б), тоді маємо: $-P + N = -ma$. Або:

$$N = P - ma = m(g - a)\;; \qquad (6.6)$$

А це значить, що вага тіла, яке падає з прискоренням g дорівнює нулю, а стан тіла у цьому випадку називається: станом невагомості.

Якщо прискорення тіла за напрямком протилежне прискоренню вільного падіння (див. рис. 6.3 - в), тоді маємо: $-P + N = ma$. Або:

$$N = P + ma = m(g + a)\;; \qquad (6.7)$$

Тобто вага тіла, яке підіймається з прискоренням, може у декілька разів перевищити силу ваги.

6.2. Поле тяжіння та його напруженість.

Гравітаційна взаємодія між тілами відбувається за допомогою гравітаційного поля, яке являє собою одну з форм буття матерії.

Основна властивість гравітаційного поля полягає у тому, що на любе матеріальне тіло, яке потрапило в нього, діє сила тяжіння:

$$\vec{F} = m\vec{g}\;; \qquad (6.8)$$

де $\vec{g}$ - напруженість гравітаційного поля; m - маса тіла.

Напруженість гравітаційного поля це векторна величина, яка чисельно дорівнює силі $\vec{F}$, що діє з боку гравітаційного поля на тіло одиничної маси і спрямована у бік дії цієї сили:

$$\vec{g} = \vec{F}/m\;; \qquad (6.9)$$

Гравітаційне поле називається однорідним, якщо у всьому просторі, де воно поширюється, напруженість поля є сталою.

Якщо вектор напруженості поля не змінюється з часом, то таке поле називають стаціонарним.

Гравітаційне поле є центральним, тобто таким у всіх точках якого вектори напруженості направлені вздовж прямих, що перехрещуються в одній нерухомій точці а їх чисельні значення визначаються відстанню від цієї нерухомої точки до шуканої точки поля (див. рис. 6.4).

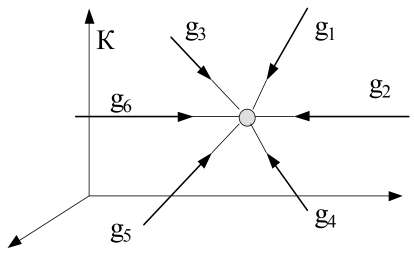

Рис. 6.4.

Розмірність напруженості гравітаційного поля співпадає з розмірністю прискорення і біля поверхні Землі чисельно дорівнює (з точністю до поправки, що обумовлена обертанням Землі) прискоренню вільного падіння g.

Напруженість гравітаційного поля в системі СІ вимірюється у таких одиницях: $[g] = [a] = [м/с^2]$.

6.3. Робота сили у полі тяжіння.

Визначимо роботу, яку треба здійснити, щоб віддалити тіло масою m на деяку відстань від тіла масою M. (див. рис. 6.5).

При переміщенні цього тіла на відстань dr, проти сили тяжіння F(r), треба виконати роботу: $dA = -F(r)\,dr$. А якщо тіло переміщується з відстані r_1 до r_2, то робота буде дорівнювати:

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}(r)dr = -\int_{r_1}^{r_2}G\frac{Mm}{r^2}dr = G\frac{Mm}{r_2} - G\frac{Mm}{r_1}\;; \qquad (6.10)$$

З формули (6.10) витікає, що робота по переміщенню тіла у полі сил тяжіння не залежить від траєкторії руху тіла, а визначається тільки його початковим та кінцевим положенням.

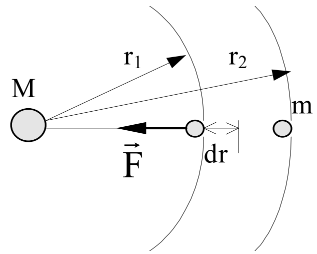

Рис. 6.5.

Таким чином, сили тяжіння слід вважати консервативними, а саме гравітаційне поле - потенціальним.

У відповідності з виразом (3.9), робота консервативних сил завжди дорівнює зменшенню потенціальної енергії механічної системи тіл, тобто:

$$A = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2\;;$$

А з (6.10) маємо:

$$A = G\frac{Mm}{r_2} - G\frac{Mm}{r_1} = -\left(G\frac{Mm}{r_1} - G\frac{Mm}{r_2}\right) = -(U_1 - U_2)\;; \qquad (6.11)$$

Тобто, ми маємо право стверджувати, що потенціальна енергія тіла масою m, яке знаходиться на відстані r від тіла масою M, визначається за наступною формулою:

$$U = -G\frac{Mm}{r} \; ; \qquad (6.12)$$

де U - потенціальна енергія гравітаційної взаємодії тіл.

6.4. Потенціал гравітаційного поля.

Потенціалом гравітаційного поля φ в даній точці називається скалярна величина, яка чисельно дорівнює потенціальній енергії тіла одиничної маси, що знаходиться у цій точці поля. Тобто:

$$\varphi = \frac{U}{m} = -G\frac{M}{r} \; ; \qquad (6.13)$$

З цієї формули випливає, що точки з однаковим потенціалом (φ = const) створюють сферичну поверхню (r = const). Такі поверхні отримали назву еквіпотенціальних.

Потенціал поля є його енергетичною характеристикою. Тому формулу роботи (6.10), можливо, у урахуванням виразів (6.12) та (6.11), перетворити до наступного вигляду:

$$A_{12} = m(\varphi_2 - \varphi_1) \; ; \qquad (6.14)$$

де φ_2, φ_1 - потенціал, у відповідних точках, гравітаційного поля.

З формули (6.13) можливо зробити висновок, що при умові $r \to \infty$, потенціал гравітаційного поля наближається до нуля, тобто $\varphi_\infty \to 0$. Тоді, за умови що тіло 1 знаходиться у нескінченності, вираз (6.14) можливо перетворити до наступного вигляду:

$$A = -m\varphi \; ; \qquad (6.15)$$

Або у диференціальній формі:

$$dA = -m\,d\varphi \; ; \qquad (6.16)$$

Тобто потенціал гравітаційного поля дорівнює роботі по переміщенню одиничної маси з нескінченності у дану точку поля.

У загальному випадку робота це добуток сили на переміщення, тому враховуючи вираз (6.16) та (6.9), маємо: $m\vec{g}\,dx = -m\,d\varphi$.

Звідки отримаємо:

$$\vec{g} = -\frac{d\varphi}{dx} \; ; \qquad (6.17)$$

Або у тривимірному випадку:

$$\vec{g} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\varphi \; ; \qquad (6.18)$$

Таким чином, вектор напруженості гравітаційного поля дорівнює градієнту його потенціалу.

Знак "-" у формулах 6.17 і 6.18 означає, що вектор напруженості гравітаційного поля має напрямок у бік зростання його потенціалу.

Одиниця вимірювання гравітаційного потенціалу у системі СІ: [φ] = [U/m] = [Дж / кг] = [м^2 с$^{-2}$].

6.5. Рух тіла змінної маси. Формула Ціолковського.

Друга половина XX сторіччя явила собою бурхливий розвиток такого до толі невідомого людству явища, як космонавтика. І саме фізика визначила основні закони природи, які дозволили людству опанувати космічний простір. Розглянемо головні з цих законів.

Закон збереження імпульсу лежить у основі так званого принципу реактивного руху. Відкидаючи газоподібні продукти згорання палива, ракета отримує деякий імпульс зворотного напрямку, що й рушить ракету вперед.

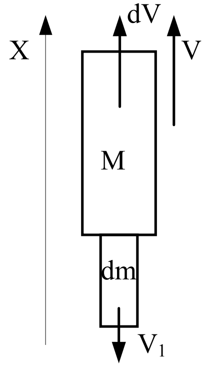

Рис. 6.6.

Нехай у момент часу t маса ракети становить m, а її швидкість - V. За час dt маса ракети зменшиться на dm, а її швидкість збільшиться на dV (рис. 6.6). Тоді, згідно з законом збереження імпульсу, маємо:

$$m d\vec{V} + (\vec{V} - \vec{V}_1)dm = 0 \; ; \qquad (6.19)$$

де V_1 - швидкість витікання газу з сопла ракети.

Різниця V_1 - V = U, визначає швидкість витікання газів з сопла ракети відносно швидкості самої ракети. Поділивши рівняння (6.19) на час dt отримаємо рівняння руху ракети:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{U}\frac{dm}{dt} \; ; \qquad (6.20)$$

Векторна величина у правій частині цього рівняння має розмірність сили і тому отримала назву реактивної сили F_p.

Визначимо максимальну швидкість ракети за умови, що її початкова маса дорівнює m_o, а кінцева - $m_к$. Тоді з рівняння (6.20), з урахуванням напрямку вектора $\vec{U}$, маємо:

$$dV = -U\frac{dm}{m} ;$$

Інтегруючи це рівняння, у вище приведених границях, отримаємо:

$$V_{max} = \int_0^V dV = -U\int_{m_0}^{m_K}\frac{dm}{m} = -U[\ell n(m_K) - \ell n(m_0)] ;$$

Або:

$$V_{max} = U\ell n\left(\frac{m_o}{m_K}\right) ; \qquad (6.21)$$

Вище приведене рівняння отримало назву формула Ціолковського, а швидкість V_{max} - характеристична швидкість ракети.

Звичайно розрахунок швидкості реальних ракет не може обмежитися використанням вище приведених формул, але їх аналіз дозволяє зробить ряд важливих висновків. З формули (6.21) видно, що для збільшення швидкості ракети треба збільшувати як відносну швидкість витікання продуктів згорання її палива так і відношення $m_o / m_к$. Цей висновок привів до появи твердопаливних ракет, швидкість витікання газів у яких значно вища ніж у ракет, що працюють на рідкому паливі та багато ступінчатих ракет, у яких можлива зміна відношення $m_o / m_к$ прямо у польоті.

6.6. Штучні супутники Землі. Космічні швидкості.

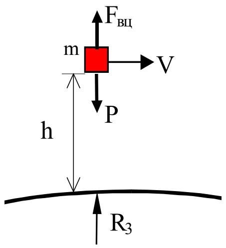

Рис. 6.7.

Для польоту ракети у космічному просторі їй необхідно мати деяку швидкість. Так, щоб ракета змогла доставити на навколоземну орбіту супутник, вона має мати першу космічну швидкість.

Для визначення цієї швидкості розглянемо сили, що діють на супутник масою m (рис. 6.7).

Супутник не впаде на Землю у тому разі, якщо його відцентрова сила інерції буде дорівнювати силі ваги. Тобто: $F_{вц} = P$.

Тоді, порівнявши праві частини формул (6.8) та (4.18), отримаємо:

$$m\frac{V^2}{(R_з + h)} = mG\frac{M_з}{(R_з + h)^2} ; \qquad (6.22)$$

де $R_з$, $M_з$ - радіус і маса Землі; h - висота польоту супутника.

Враховуючи, що за звичай $R_з >> h$, з (6.22) отримаємо формулу для визначення першої космічної швидкості:

$$V_1 = \sqrt{G\cdot\frac{M_з}{R_з}} = \sqrt{g_o R_з} \approx 7{,}9 \text{ км/с} ; \qquad (6.23)$$

Другою космічною швидкістю називають таку мінімальну швидкість, яка дозволить ракеті покинуть границі Земного гравітаційного поля. Для цього її кінетична енергія повинна дорівнювати роботі по подоланню Земного гравітаційного поля. Тобто:

$$\frac{mV_2^2}{2} = \int_{R_з}^{\infty}\vec{F}(r)dr = \int_{R_з}^{\infty}G\frac{Mm}{r^2}dr = G\frac{Mm}{R_з} ; \qquad (6.24)$$

Звідки:

$$V_2 = \sqrt{2G\cdot\frac{M_з}{R_з}} = \sqrt{2g_o R_з} \approx 11{,}2 \text{ км/с} ; \qquad (6.25)$$

Третьою космічною швидкістю називають таку мінімальну швидкість, яка дозволить ракеті покинути границі Сонячного гравітаційного поля і вийти у вільний космічний простір. Третя космічна швидкість дорівнює $V_3 \approx 16{,}7$ км/с.

6.7. Контрольні запитання.

1. Запишіть та сформулюйте закон всесвітнього тяжіння.
2. У чому полягає різниця між силою ваги та вагою тіла?
3. Що характеризує напруженість гравітаційного поля?
4. Запишіть співвідношення між вектором напруженості гравітаційного поля та його потенціалом.
5. Яким чином визначається робота сили у гравітаційному полі?
6. Наведіть визначення потенціалу гравітаційного поля.
7. Чому гравітаційне поле відносять до класу потенціальних?
8. Запишіть та проаналізуйте формулу Ціолковського.

ГЛАВА 7.

МЕХАНІКА РІДИН

7.1. Тиск у рідині та газах. Закони Паскаля і Архімеда.

При визначені законів механіки рідин та газів їх уявляють як суцільне середовище, що безперервно розподілене у зайнятому ними просторі з деякою густиною, відволікаючись від атомно-молекулярної будови цих речовин. Різниця між твердими тілами з однієї сторони та рідинами і газами з другої, полягає у їх поведінці при зміні форми тіл.

Тверді тіла деформуються тільки під дією значних сил.

Повільна зміна форми рідини, без зміни її об'єму, може відбуватися під дією, як завгодно малої, сили. Густина рідини практично не залежить від тиску. Густина ж газів суттєво залежить від тиску в них.

Фізична величина, яка дорівнює відношенню нормальної сили F, що діє з сторони рідини на деяку площину, до значення цієї площини S, отримала назву тиск рідини. Тобто:

$$P = F/S\,; \qquad (7.1)$$

Закон Паскаля стверджує: тиск у довільній точці рідини, що покоїться, однаковий по всім напрямкам.

Рідина називається нестисливою, якщо її густина не залежить від тиску і не змінюється з часом.

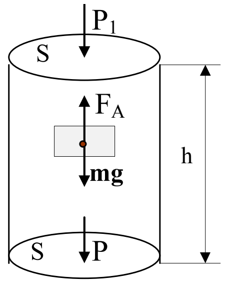

Рис. 7.1.

Виділимо думкою, вертикально розташований циліндр рідини з поперечним перетином S та висотою h (рис. 7.1).

Сила тяжіння рідини в об'ємі циліндра, дорівнює $F = mg = \rho hSg$. Тоді тиск на нижню основу циліндра буде дорівнювати:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\rho g h S}{S} = \rho g h\,; \qquad (7.2)$$

де ρ- густина рідини; g - прискорення вільного падіння.

Вираз (7.2) отримав назву закон гідростатики.

Якщо на рідину, у верхній основі циліндра, діє зовнішній тиск P_1, то вираз (7.2) можливо перетворити до наступного вигляду:

$$P = P_1 + \rho g h\,; \qquad (7.3)$$

Згідно з законом Архімеда: *на занурене у рідину чи газ тіло діє виштовхуюча сила, що чисельно дорівнює вазі рідини чи газу, які витіснені тілом*:

$$F_A = \rho g V\,; \qquad (7.4)$$

де V - об'єм зануреного у рідину тіла.

Сила Архімеда має напрямок, протилежний силі тяжіння тіла та прикладена у точці, що отримала назву центр тиску.

Центр тиску співпадає з центром мас однорідного тіла чи той його частини, що занурена у рідину чи газ (див. рис. 7.1).

Тиск у системі СІ вимірюється у паскалях: [P] = [Н/м^2] = [Па].

7.2. Стаціонарна течія рідини. Рівняння нерозривності.

Нестислива рідина, в якій повністю відсутнє внутрішнє тертя (в'язкість), називається ідеальною.

Течія рідини вважається стаціонарною, якщо в кожній її точці вектор швидкості руху рідини постійний. Рух рідини можливо зобразити за допомогою ліній течії. Це такі лінії, дотичні до яких співпадають з напрямом векторів швидкості руху окремих частинок рідини. На рис. 7.2 в точці А густина ліній течії більша, ніж в точці В. Це свідчить про те, що в точці В швидкість руху рідини менша, ніж у точці А. Частину рідини, що обмежена лініями течії, називають трубкою течії.

При стаціонарній течії нестисливої рідини, її об'єм, що втікає в трубку току за одиницю часу через переріз S_1, дорівнює об'єму рідини, що витікає через переріз S_2 цієї ж трубки (див. рис. 7.2). Тобто:

$$Q_1 = Q_2\,; \qquad (7.5)$$

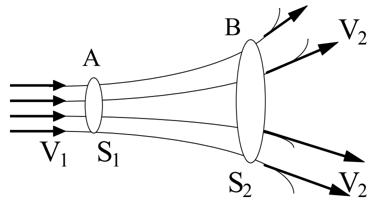

Рис. 7.2.

Ці об'єми рідини можливо визначити таким чином:

$$Q_1 = V_1 S_1 t; \qquad Q_2 = S_2 V_2 t;$$

де V_1, V_2 - швидкість течії рідини на перерізі трубки току S_1 і S_2; t - час.

Звідки маємо:

$$S_1 V_1 = S_2 V_2\,;$$

Перерізи S_1 та S_2 ми вибрали довільно, тому маємо право стверджувати, що для любого перерізу трубки течії рідини виконується наступне співвідношення, яке отримало назву рівняння нерозривності.

$$S\,V = const\,; \qquad (7.6)$$

Згідно з цим рівнянням добуток швидкості руху стаціонарної течії нестисливої рідини на площу перерізу, де ця швидкість визначалась, є для даної трубки течії величиною постійною.

Цей добуток в системі СІ має розмірність [м^3/с] і являє собою за фізичним змістом об'ємний розхід рідини чи газу.

7.3. Рівняння Бернуллі.

Розглянемо трубку течії, яка обмежена перерізом S_1 та S_2, що знаходяться на висотах h_1 та h_2 над рівнем горизонту (див. рис. 7.3).

Нехай у даний момент часу на перерізі S_1 швидкість течії рідини дорівнює V_1, а зовнішній тиск - P_1. На перерізі S_2 швидкість течії рідини - V_2, а зовнішній тиск P_2. Протягом часу Δt перетин S_1 зміщується вздовж трубки течії на відстань L_1, а перетин трубки течії S_2 - на відстань L_2.

Згідно з законом збереження енергії зміна повної енергії ідеальної рідини буде дорівнювати роботі зовнішніх сил по переміщенню деякої маси рідини. Тобто:

$$A = E_2 - E_1\,; \qquad (7.7)$$

де E_2 і E_1 - повна енергія рідини масою m у перерізі S_1 і S_2.

Значення цих енергій дорівнює:

$$E_1 = \frac{mV_1^2}{2} + mgh_1;$$

$$E_2 = \frac{mV_2^2}{2} + mgh_2;$$

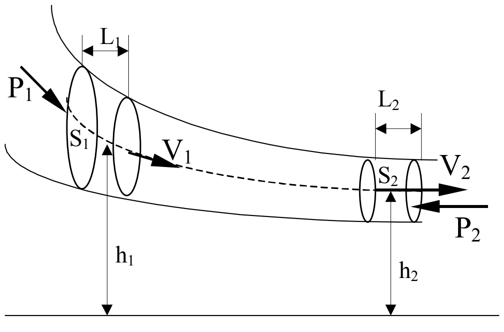

Рис. 7.3.

З іншого боку роботу A можливо визначити, як роботу, що виконують зовнішні сили при переміщенні рідини по трубці течії за час Δt:

$$A = A_1 + A_2\,; \qquad (7.8)$$

Роботи A_1 та A_2 визначимо як добуток сили на переміщення:

$$A_1 = F_1\,L_1 = F_1\,V_1\,\Delta t = P_1\,S_1\,V_1\,\Delta t\,;$$

$$A_2 = F_2\,L_2 = F_2\,V_2\,\Delta t = -P_2\,S_2\,V_2\,\Delta t\,;$$

Робота A_2 має від'ємний знак тому, що тиск P_2 має напрямок протилежний течії рідини.

Згідно з законом збереження енергії, робота зовнішніх сил (7.8) дорівнює зміні повної енергії системи (7.7). Тоді маємо:

$$A_1 + A_2 = E_2 - E_1\,;$$

Або:

$$A_1 + E_1 = E_2 - A_2\,;$$

Підставивши у вище приведене рівняння, значення відповідних функцій, отримаємо:

$$\frac{mV_1^2}{2} + mgh_1 + P_1S_1V_1\Delta t = \frac{mV_2^2}{2} + mgh_2 + P_2S_2V_2\Delta t\,; \qquad (7.9)$$

Рівняння нерозривності (7.6), у нашому випадку, має вигляд:

$$Q = Q_1 = Q_2 = V_1\,S_1\,\Delta t = S_2\,V_2\,\Delta t\,;$$

Далі поділимо рівняння (7.9) на значення Q та враховуючи, що відношення m/Q, дорівнює густині рідини ρ, отримаємо:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2\,;$$

Враховуючи, що перетини трубки течії S_1 та S_2 нами приймалися довільно, маємо повне право записати в загальному вигляді:

$$P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho V^2 = const\,; \qquad (7.10)$$

Рівняння (7.10) вперше встановлено російським фізиком Д.Бернуллі (1700-1782) і отримало назву <u>рівняння Бернуллі.</u>

Параметр P у рівнянні Бернуллі являє собою питому енергію сил тиску в рідині і називається <u>статичним тиском або гідростатичним напором</u>.

Параметр ρgh це питома потенціальна енергія рідини в полі тяжіння, її називають <u>гідравлічним тиском або гідравлічним напором.</u>

Параметр $\rho V^2/2$ являє собою питому кінетичну енергію рідини, що рухається, та носить назву <u>гідродинамічного тиску або динамічного напору.</u>

7.4. В'язкість (внутрішнє тертя) рідини.

В'язкість (внутрішнє тертя) - це властивість рідин та газів чинити опір переміщенню однієї частини рідини відносно другої.

Сила внутрішнього тертя F, пропорційна площі поверхні шару рідини S, та залежить від того як скоро змінюється швидкість руху рідини при переході від одного прошарку рідини до іншого.

На рис. 7.4 приведені два шари рідини, які знаходяться один від одного на відстані ΔX і рухаються з швидкостями $V_2 - V_1 = \Delta V$. Відношення $\Delta V/\Delta X$ вказує, як скоро змінюється швидкість при переході від одного шару рідини до другого і отримало назву градієнт швидкості.

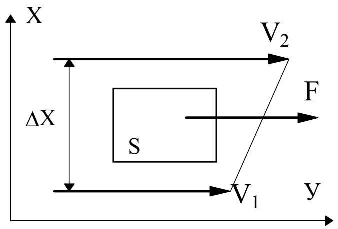

Рис. 7.4.

Модуль сили внутрішнього тертя визначається таким чином:

$$F = \eta \left|\frac{\Delta V}{\Delta x}\right| S \; ; \qquad (7.11)$$

де η - коефіцієнт динамічної в'язкості рідини чи газу.

В'язкість рідини залежить від її температури. Так, в'язкість води при збільшенні її температури від 0^0 C до 20^0 C зменшується майже вдвічі. А в газах, навпаки, їх в'язкість при зростанні температури - збільшується.

Для визначення коефіцієнту динамічної в'язкості рідини використовують метод Стокса, що ґрунтується на визначені швидкості падіння у рідині невеличких тіл сферичної форми. При цьому на кульку, яка поволі падає у рідині, діють три сили: сила тяжіння P; сила Архімеда F_A та сила опору, яка визначається з такої формули: $F_C = 6\pi\eta rV$.

Тоді, за умови рівномірного руху кульки, маємо: $P = F_A + F_C$.

З цього рівняння неважко отримати вираз для визначення коефіцієнту динамічної в'язкості η:

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho')g r^2}{9V} \; ; \qquad (7.12)$$

де ρ, ρ' - густина кульки та рідини; r - радіус кульки; V - швидкість падіння кульки у рідині; g - прискорення вільного падіння.

У системі СІ динамічну в'язкість вимірюють в наступних одиницях: $[\eta] = [F\,x / V\,S] = [Н\,с/м^2] = [Па\,с]$.

7.5 Ламінарний і турбулентний режими течії рідини.

Відомо два режими течії рідини чи газу: ламінарний та турбулентний. Течія рідини при якій швидкості часток рідини всюди спрямовані вздовж осі трубки течії, називається ламінарною. Прошарки рідини при ламінарному режимі течії ковзають один відносно одного без перемішування. Така течія можлива при невеликих швидкостях руху рідини в трубках малого поперечного перерізу.

Зі зміною швидкості руху рідини або зі зміною площі її поперечного перерізу, характер течії рідини змінюється. Замість пошарової течії виникає течія, що носить нерегулярний характер - турбулентний. Прошарки рідини при такій течії перемішуються. При турбулентному рухові рідини її швидкість в локальній точці об'єму не залишається постійною, а виконує хаотичні коливання.

Англійський фізик О.Рейнольдс (1842-1912) встановив, що режим течії рідини визначається значенням деякої безрозмірної величини, яка отримала назву число Рейнольдса Re:

$$Re = \frac{\rho V_{ср} L}{\eta} \; ; \qquad (7.13)$$

де $V_{ср}$ - середня швидкість руху речовини; L - характерний лінійний вимір для даного поперечного перерізу течії; η, ρ - коефіцієнт динамічної в'язкості та густина речовини.

Експериментально встановлено, що для усіх значень Re, які менші за граничне число ($Re < 1000$), течія буде ламінарною, а в іншому випадку ($Re > 2300$), - турбулентною. В число Рейнольдса входить відношення $\nu = \eta/\rho$, яке називають коефіцієнтом кінематичної в'язкості рідини.

7.6. Рух тіл в рідинах та газах.

На тіло, яке рухається в рідині чи газі, з їх боку діють дві сили: у напрямку течії F_X, та перпендикулярну до неї F_Y (рівнодіючу цих сил позначимо F). Сила F_X спричиняє лобовий опір руху тіла, а F_Y - так звану підйомну силу (див. рис. 7.5).

При стаціонарному обтіканні твердого тіла ідеальною речовиною лобовий опір відсутній. Але при русі тіла у в'язкій речовині картина змінюється. У віддаленні від тіла речовина не буде збурена, а навколо тіла виникає граничний прошарок, в якому діють сили в'язкості. Дією цих сил і зумовлений лобовий опір рухові тіла у рідині чи газі:

$$F_x = {}^1/_2\, C_x\, \rho V^2\, L\ ; \qquad (7.14)$$

де C_x - коефіцієнт опору руху тіла; L - найбільший поперечний переріз тіла; ρ - питома вага рідини.

Підйомна сила крила літака обумовлена асиметричною формою його поперечного вертикального перерізу. Це забезпечує більшу відносну швидкість руху повітря над крилом у порівнянні із зоною під крилом, що є наслідком рівняння нерозривності (7.6). Тоді $V_1 > V_2$, бо $S_2 > S_1$ (див. рис. 7.5). Для горизонтальної трубки течії, рівняння Бернуллі має вигляд:

$$P_1 + {}^1/_2\, \rho V_1^{\,2} = P_2 + {}^1/_2\, \rho V_2^{\,2}\ ; \qquad (7.15)$$

Однак, як ми вже встановили $V_1 > V_2$, тоді з рівняння (7.15) слідує, що $P_1 < P_2$. Тобто тиск повітря під крилом літака вище, ніж над ним. Завдяки цьому і виникає підйомна сила крила літака, яка чисельно визначається з наступного рівняння:

$$F_y = {}^1/_2\, C_y\, \rho V^2\, L\ ; \quad (7.16)$$

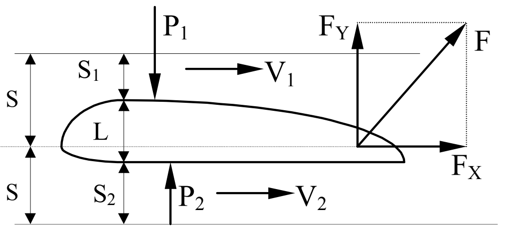

Рис. 7.5.

де C_y - коефіцієнт підйомної сили.

Відношення коефіцієнта C_y до коефіцієнта C_x отримало назву <u>якість крила.</u> Чім більша якість крила, тим гарніше його конструкція.

7.7. Контрольні запитання.

1. Сформулюйте закони Паскаля та Архімеда.
2. Яку течію рідини вважають стаціонарною ?
3. Які сили діють на тіло, що рухається у рідині чи газі ?
4. За рахунок чого виникає підйомна сила крила літака?
5. Запишіть рівняння нерозривності нестисливої рідини.
6. Запишіть рівняння Бернуллі.
7. Які режими течії речовини Ви знаєте ?
8. Що визначає число Рейнольдса та від чого воно залежить?

ГЛАВА 8.
РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

8.1. Перетворення Галілея. Механічний принцип відносності.

Розглянемо дві інерціальні системи відліку. Систему K (з координатами x, y, z), котру будемо вважати умовно нерухомою, та систему - K^1 (з координатами x^1, y^1, z^1), що рухається відносно системи K рівномірно та прямолінійно зі швидкістю U = const.

Відлік часу почнемо з моменту, коли начала координат співпадають. Тоді у довільний момент часу розташування цих систем буде мати вигляд який приведений на рис. 8.1.

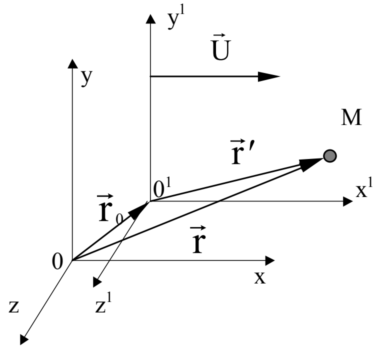

Рис. 8.1.

Швидкість U має напрямок вздовж 00^1, тоді радіус-вектор проведений з 0 до 0^1 дорівнює: $r_0 = Ut$. Використовуючи правило додавання векторів маємо: $\vec r = \vec r\,' + \vec r_0$. Або:

$$\begin{cases} \vec r = \vec r\,' + \vec U\, t \\ t = t' \end{cases} \qquad (8.1)$$

де $\vec r\,'$, $\vec r$ - радіус-вектори точки M у системах відліку K^1 та K; t, t^1 - рух часу у системах відліку K та K^1.

Ця система рівнянь отримала назву: <u>перетворення координат по Галілею.</u>

Друге рівняння, у системі (8.1), відображає той факт, що в класичній механіці рух часу не залежить від руху системи відліку.

Візьмемо похідну від першого рівняння у системі (8.1) по часу:

$$\frac{d}{dt}(\vec r) = \frac{d}{dt}(\vec r\,' + \vec U\, t)\ ; \qquad (8.2)$$

Звідки, враховуючи, що похідна по часу від радіуса-вектора дорівнює швидкості, маємо класичний <u>закон додавання швидкостей:</u>

$$\vec V = \vec V\,' + \vec U\ ; \qquad (8.3)$$

де $\vec V$, $\vec V\,'$ - швидкості точки M у системах відліку K та K^1 відповідно.

Співвідношення (8.3) являється наслідком не тільки векторного характеру швидкості, а й тих уявлень про час та простір, які лежать в основі класичної механіки.

Враховуючи, що U = const, похідна по часу від рівняння (8.3), буде дорівнювати:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{V}' + \vec{U})}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} = \vec{a}' ; \tag{8.4}$$

Тобто, прискорення точки М однакове у системах відліку К і K^1.

Припускаючи, що маса матеріальної точки М однакова у всіх системах відліку, маємо:

$$m\vec{a} = m\vec{a}' ;$$

Або:

$$\vec{F} = \vec{F} ; \tag{8.5}$$

Таким чином ми довели механічний принцип відносності: *рівняння динаміки при переході від однієї системи відліку до другої залишаються незмінними, тобто вони інваріантні відносно перетворень координат по Галілею.*

Узагальнюючи механічний принцип відносності можливо стверджувати, що усі закони класичної механіки не змінюють свою форму при перетвореннях координат та часу по Галілею.

При доказі механічного принципу відносності ми зверталися до двох аксіом: про інваріантність проміжків часу між двома подіями та про інваріантність відстаней між двома точками по відношенню до вибору системи відліку.

З першої аксіоми витікає, що хід часу однаковий у всіх системах відліку, а з другої - що розміри тіл не залежать від швидкості їх руху.

8.2. Постулати спеціальної теорії відносності.

Досліди по визначенню швидкості світла у рухомій системі відліку дали такий результат: незалежно від величини та напрямку руху системи відліку, швидкість світла залишається постійною.

Це показало, що класичний закон додавання швидкостей, а значить і перетворень Галілея, мають обмежену область застосування. Вони не можуть згодитись для описання явищ, що протікають зі швидкостями, близькими до швидкості світла.

У зв'язку з цим виникла потреба в критичному перегляді тих ідей, які покладено в основу класичної механіки. Цю задачу було вирішено в 1905 році видатним німецькім фізиком А.Ейнштейном, який вніс значний вклад у створення спеціальної теорії відносності, яку також часто іменують релятивістською теорією, а особливі явища, що описуються цією теорією - релятивістськими ефектами.

В основу релятивістської теорії покладено два постулати.

I. Принцип відносності. Усі закони та явища природи інваріантні по відношенню до переходу від однієї інерціальної системи відліку до другої. Тобто всі інерціальні системи відліку рівноправні між собою.

II. Принцип інваріантності швидкості світла. У всіх інерціальних системах відліку, швидкість розповсюдження світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача, і однакова у всіх інерціальних системи відліку. Тобто швидкість світла інваріантна по відношенню до таких систем відліку.

Перший постулат А.Ейнштейна є узагальненням механічного принципу відносності Г.Галілея на любі фізичні процеси які відбуваються у природі.

Другий постулат А.Ейнштейна, про постійність швидкості світла, є фундаментальною властивістю природи і констатується як дослідницький факт. А швидкість світла в вакуумі, яка дорівнює $c = 3\ 10^8$ м/с, є максимально можливою швидкістю у всесвіті.

Аналіз природних явищ в інерціальних системах відліку, проведений на ґрунті вище приведених постулатів, привів до перегляду фундаментальних понять класичної фізики: простору та часу.

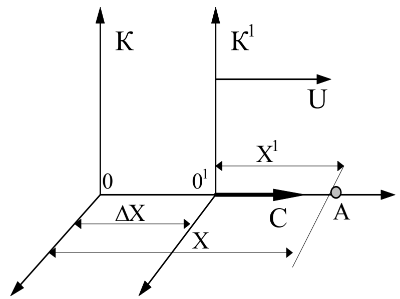

Рис. 8.2.

Розглянемо дві інерціальні системи відліку: система К умовно нерухома; система K^1 рухається відносно системи К рівномірно і прямолінійно зі швидкістю U = const. (див. рис. 8.2).

Нехай в початковий момент часу $t = t^1 = 0$, коли центри систем 0 та 0^1 співпадають, з них випромінюється світловий імпульс. За час t в системі К сигнал дійде до точки А, пройшовши при цьому шлях:

$$X = C\,t\,;$$

де C - швидкість світла в вакуумі.

За час t^1 в системі K^1 сигнал дійде до точки A, пройшовши шлях: $X^1 = C\,t^1$. Тоді:

$$\Delta X = X - X^1 = C\,(t - t^1) \neq 0\,; \qquad (8.6)$$

Те, що $\Delta X \neq 0$, випливає з геометричної картини, яка приведена на рис. 8.2. Зробимо більш детальний аналіз виразу (8.6).

1. У класичній механіці швидкість не обмежена, тобто $C = \infty$. Тоді: $\Delta X = \infty\,(t - t^1) = \infty\, 0 \neq 0$;

2. У релятивістської механіці, припускаючи, що $C = \text{const}$, отримаємо: $\Delta X = C\,(t - t^1) \neq 0$;

А це значить, що вище приведена нерівність буде виконуватись тільки при умові $t \neq t^1$. Таким чином, припущення про обмеження швидкості руху приводить до фундаментального висновку: <u>хід часу має відносний характер і змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.</u>

8.3. Перетворення Лоренца.

У спеціальній теорії відносності класичні перетворення Галілея мають бути замінені на так звані <u>перетворення Лоренца.</u>

Якщо система K^1 рухається у напрямку осі OX системи K, зі швидкістю V, а для моменту часу $t = t^1 = 0$, центри обох систем відліку співпадають, то перетворення Лоренца мають такий вигляд:

<u>Від K до K^1</u>   <u>Від K^1 до K</u>

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - V\,t}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ y' = y\,; \\ z' = z\,; \\ t' = \dfrac{t - V\,x/C^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + V\,t'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ y = y'; \\ z = z'; \\ t = \dfrac{t' + V\,x'/C^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \end{cases} \qquad (8.7)$$

де C - швидкість світла у вакуумі; $\beta = V/C$.

Легко пересвідчитись, що коли $V = 0$, перетворення Лоренца

трансформуються у перетворення Галілея.

Перетворення Лоренца вказують, що при переході від однієї інерціальної системи відліку до другої, змінюються не тільки просторові координати розглянутих явищ, а й відповідні моменти часу. Таким чином, в релятивістській механіці простір і час втрачають незалежність один від одного і розглядаються у системі чотиримірного простору-часу. Тому перший постулат теорії відносності можливо формулювати у наступному виді: <u>усі закони природи в інерціальних системах відліку інваріантні відносно перетворення Лоренца.</u>

8.4. Одночасність подій у релятивістській механіці.

В класичній механіці любі дві події, які відбуваються одночасно в деякій інерціальній системи відліку, будуть одночасними і в будь-якій іншій системи відліку, тобто поняття одночасності є абсолютним.

По-іншому це питання постає у релятивістській механіці. Розглянемо два явища A та B, які в системі K^1 протікають в один і той же момент часу t^1, але в різних точках простору X_A та X_B. Ці самі явища в системі K згідно з перетворенням Лоренца, будуть відбуватись у такі моменти часу:

$$t_A = \frac{t' + \dfrac{V^2 X_A}{C^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad t_B = \frac{t' + \dfrac{V^2 X_B}{C^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad (8.8)$$

Постільки $X_A \neq X_B$, то явища A та B в системі K одночасними не будуть, бо: $t_A \neq t_B$. Тобто, якщо у одній системі відліку подія A трапилась раніше події B, то в іншій системі відліку може бути навпаки.

Це не стосується просторово-сумісних подій, які будуть одночасними в любих системах відліку.

Таким чином у релятивістській механіці <u>одночасність явищ залежить від вибору системи відліку і, як наслідок, являється відносним поняттям.</u>

Однак це не значить, що в у релятивістській механіці не дотримується <u>принцип причинності</u>, тобто подія яка є причиною явища трапляється завжди раніш події яка є слідством у будь-якій системі відліку.

Розглянемо цей принцип на прикладі такої події: постріл з рушниці та попадання кулі в ціль.

Нехай постріл пролунав в точці з координатою X_1 в момент часу t_1, а куля потрапила у ціль в точці X_2 в момент часу t_2 . Швидкість кулі у нерухомій системі відліку К буде дорівнювати: $U = (X_2 - X_1) / (t_2 - t_1)$.

Вочевидь, що $t_2 > t_1$, тобто подія t_2 (влучення кулі в ціль) трапилась раніше події t_1 (постріл з рушниці). Тепер визначним значення різниці $t^1{}_2 - t^1{}_1$ у системі відліку $К^1$, що рухається з швидкістю V відносно системи відліку К. З перетворень Лоренца маємо:

$$t_2{}^1 - t_1{}^1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 - \frac{V}{C^2}U\right); \qquad (8.9)$$

Розглянемо отриману формулу більш детально. Вочевидь, що $\sqrt{1-\beta^2} > 0$ та $(1-VU/C^2) > 0$, бо швидкість світла С у природі максимальна, а значить відношення швидкостей у цих формулах завжди буде менше одиниці. Різниця часу $t_2 - t_1 > 0$ по умові задачі. Тоді з формули (8.9) можливо зробити висновок, що $t^1{}_2 - t^1{}_1 > 0$, а значить, що $t^1{}_2 > t^1{}_1$.

Таким чином, ми встановили, що влучення кулі в ціль трапляється завжди пізніше пострілу з рушниці, незалежно від системи відліку, що розглядається, і значить причинно-слідчі зв’язки у теорії відносності не порушуються.

8.5. Скорочення довжина тіл у релятивістській механіці.

Як відомо для визначення довжини тіла, що рухається, необхідно одночасно виміряти координати його початкової та кінцевої точок. Тоді довжина тіла визначається як різниця цих координат.

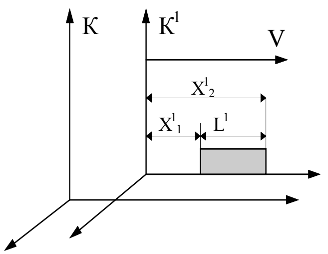

Рис. 8.3.

Нехай система відліку $К^1$ рухається зі швидкістю V відносно нерухомої системи К у напрямку осі ОХ (рис. 8.3). В системі $К^1$ знаходиться нерухоме тіло, а його довжина становить:

$$L^1 = X^1{}_1 - X_2{}^1 ;$$

Використовуючи перетворення Лоренца, визначимо довжину L того ж самого тіла відносно системи відліку К:

$$L' = X_1^1 - X_2^1 = \frac{X_2 - V\,t}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{X_1 - V\,t}{\sqrt{1-\beta^2}} = $$

$$= \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

Звідки маємо:

$$L = L^1 \cdot \sqrt{1-\beta^2} \; ; \qquad (8.10)$$

Постільки параметр $\sqrt{1-\beta^2}$ завжди менший за одиницю, з отриманого рівняння (8.10) можливо зробити висновок: довжина тіла, що рухається відносно інерціальної системи відліку, зменшується тим більше, чим більше швидкість руху.

Параметр L називають <u>власною довжиною тіла.</u> Аналогічно розмірковуючи, неважко переконатись в тім, що поперечні розміри тіла, тобто розміри у напрямку осей OY та OZ, що перпендикулярні до напрямку руху тіла, від швидкості руху тіла не залежать.

Таким чином: <u>лінійні розміри тіла максимальні у тій інерціальній системі відліку, відносно якої воно знаходиться у стані спокою.</u>

Разом з тим слід зауважити, що зміна розміру тіла при переході від однієї системи відліку до іншої, не зв’язане з дією будь-яких сил на тіло, що стискують його вздовж напряму руху. Це чисто кінематичний, уявний ефект.

8.6. Відносність часу у релятивістській механіці.

Розглянемо два явища, які відбуваються в системі відліку $К^1$ в одній точці простору Х, але в різні моменти часу $t^1{}_1$ і $t^1{}_2$. Проміжок часу між цими явищами дорівнює: $\Delta t^1 = t^1{}_2 - t^1{}_1 = \tau^1$. Проміжок часу між цими явищами в системі К (в системі К ці явища відбуваються в різних точках простору) становить: $\Delta t = t_2 - t_1 = \tau$. Використовуючи перетворення Лоренца, одержуємо:

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{VX}{C^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad t_1 = \frac{t_1' + \frac{VX}{C^2}}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

Звідки:

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t_2^1 - t_1^1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

Або:

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad (8.11)$$

Цей вираз і відображає релятивістський ефект сповільнення часу.

Таким чином, проміжок часу між подіями в деякій точці, мінімальний у тій системі відліку, де ця точка нерухома.

Тобто час в інерціальній системі відліку, що рухається, йде повільніше часу в системі відліку, що покоїться.

Час який відраховується по годиннику, що рухається разом з системою відліку, отримав назву власного часу. Власний час однаковий у всіх інерціальних системах відліку, тобто є інваріантним відносно перетворення координат по Лоренцу.

Релятивістський ефект сповільнення часу є цілком реальним і отримав експериментальне підтвердження при вивченні законів розпаду нестабільних π-мезонів, що рухаються з космічного простору до земної поверхні. За допомогою дослідів було встановлено, що власний час життя цих π- мезонів становить $\tau \approx 2\ 10^{-8}$ с. За цей час π-мезони, які рухаються з біля світловими швидкостями, можуть пройти шлях $X = C\tau = 2\ 10^{-8}\ 3\ 10^{9} = 60$ м. Однак π-мезони, які утворюються у верхніх шарах атмосфери (висота ≈ 30 км) були виявлені на земній поверхні. Це пояснюється тим, що час життя π- мезонів по наземному годиннику, згідно з рівнянням (8.11), значно перевищує значення $2\ 10^{-8}$ с.

8.7. Інтервал між подіями.

Відносність довжини та часу у релятивістській механіці дозволяє припустити, що повинна бути деяка фізична величина, яка не залежить від системи відліку і є інваріантною до перетворення координат по Лоренцу. У чотиривимірному просторі, у якому люба фізична подія характеризується чотирма координатами (x, y, z, t), такою величиною є інтервал між двома подіями S, що визначається з виразу (8.12).

$$S_{12} = \sqrt{C^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(L_2 - L_1\right)^2}; \qquad (8.12)$$

де C - швидкість світла у вакуумі; t_2-t_1 - проміжок часу між двома подіями; $L_2 - L_1 = \sqrt{\left(X_2 - X_1\right)^2 + \left(Y_2 - Y_1\right)^2 + \left(Z_2 - Z_1\right)^2}$ - відстань між двома подіями у звичайному тривимірному просторі.

Основна властивість інтервалу: *інтервал між двома подіями інваріантний по відношенню до перетворень координат по Лоренцу.*

Тобто інтервал між подіями однаковий у любих системах відліку:

$$S_{12} = S_{12}^1; \qquad (8.13)$$

Інваріантність інтервалу між двома подіями свідчить про те, що простір та час органічно зв'язані між собою і створюють єдину форму буття матерії: простір-час.

Тому, незважаючи на відносний характер відстані і часу, течія подій у світі має об'єктивний характер і не залежить від системи відліку. Подальший розвиток теорії відносності (загальна теорія відносності) вказав, що геометрія простору-часу у будь якій області, змінюється в залежності від концентрації в ній маси та законів її руху.

8.8. Релятивістський закон додавання швидкостей.

Встановимо релятивістський закон додавання швидкостей.

Нехай матеріальна точка A рухається в інерціальній системі K^1 зі швидкістю U^1, а система K^1, рухається відносно системи K зі швидкістю V. Встановимо, чому дорівнює швидкість цієї точки U у системі відліку K (див. рис. 8.4).

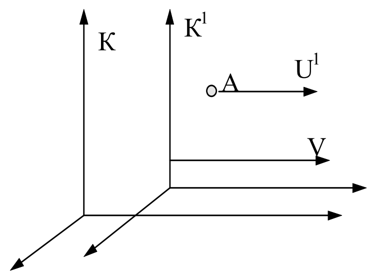

Рис. 8.4.

За визначенням U = dx/dt, тоді використовуючи перетворення Лоренца, отримаємо:

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{C^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

Тоді:

$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V\,dt'}{dt' + \frac{V}{C^2}dx'} =$$

$$= \frac{dt'\left(\frac{dx'}{dt'} + V\right)}{dt'\left(1 + \frac{V\,dx'}{C^2\,dt'}\right)};$$

Враховуючи, що $U^1 = dx^1/dt^1$, одержимо релятивістський закон додавання швидкостей у вигляді (8.14).

$$U = \frac{U^1 + V}{1 + \frac{VU^1}{C^2}}; \qquad (8.14)$$

Аналогічним чином можливо отримати:

$$U^1 = \frac{U - V}{1 - \frac{VU}{C^2}}; \qquad (8.15)$$

За умови V << C, одержане співвідношення (8.14), переходить в класичний закон додавання швидкостей: $U = U^1 + V$. Якщо в системі K^1 швидкість тіла дорівнює швидкості світла, тобто $U^1 = C$, а швидкість V також дорівнює швидкості світла, тоді в системі відліку K швидкість тіла буде дорівнювати:

$$U = \frac{U^1 + V}{1 + \frac{VU^1}{C^2}} = \frac{C + C}{1 + \frac{CC}{C^2}} = C;$$

Тобто релятивістський закон додавання швидкостей не суперечить другому постулату теорії відносності: <u>швидкість світла у вакуумі є максимально можливою швидкістю у природі.</u>

<u>8.9. Основний закон релятивістської динаміки.</u>

У кінці XIX сторіччя на дослідах з електронами було встановлено, що їх маса збільшується з ростом швидкості руху електрона за законом виду (8.16).

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}; \qquad (8.16)$$

де m_0 - маса спокою тіла (маса тіла в системі відліку, де воно знаходиться в стані спокою); m - релятивістська маса тіла (маса тіла в системі відліку відносно якої воно рухається зі швидкістю V).

Відношення m/m_0 достатньо відрізняється від одиниці тільки у разі швидкостей, які можливо порівняти зі швидкістю світла у вакуумі.

Згідно з <u>механічним принципом відносності А.Ейнштейна</u> *математичний запис будь якого фізичного закону має бути однаковим для усіх інерціальних систем відліку.*

Тоді <u>релятивістський імпульс</u> матеріальної точки дорівнює:

$$\vec{P} = m\vec{V} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{V}; \qquad (8.17)$$

А <u>основне рівняння релятивістської динаміки</u> має такий вигляд:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}; \qquad (8.18)$$

Або:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{V}\right); \qquad (8.19)$$

Згідно з виразами (8.17) та (8.19) при наближенні швидкості руху тіл до значення C спостерігається необмежене зростання його маси та імпульсу. Але реальні сили мають кінцеві значення та обмежений час дії, звідки випливає висновок: швидкість тіла у будь-якій інерціальній системі відліку не може дорівнювати швидкості світла у вакуумі, а завжди менша за неї.

В релятивістській динаміці виконуються такі закони збереження.

<u>Закон збереження релятивістського імпульсу:</u> *сумарний релятивістський імпульс замкнутої механічної системи з течією часу не змінюється при будь-яких процесах, що в ній відбуваються;*

<u>Закон збереження релятивістської маси:</u> *повна релятивістська маса замкнутої механічної системи з течією часу не змінюється при будь-яких процесах, що в ній відбуваються.*

8.10. Закон взаємозв'язку маси та енергії.

Одним з самих важливих результатів теорії відносності є універсальне співвідношення між енергією тіла та його масою:

$$E = mC^2 = \frac{m_0 C^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ; \qquad (8.20)$$

Це рівняння є фундаментальним законом природи - законом взаємозв'язку маси та енергії. Співвідношення (8.20) має абсолютно універсальний характер, воно може бути застосовано до усіх форм енергії у любих системах відліку.

Якщо тіло знаходиться у стані спокою, то його енергія (енергія спокою) набуває значення:

$$E_0 = m_0 C^2\ ; \qquad (8.21)$$

Співвідношення (8.19) та (8.20) виражають нероздільний зв'язок між матерією, кількісною мірою якої являється маса, та рухом, кількісною мірою якого є енергія.

Оскільки кінетична енергія тіла визначається, як енергія пов'язана з рухом тіла, тоді для її знаходження потрібно відняти від повної енергії тіла його енергію спокою. Тоді маємо:

$$E_K = E - E_0 = m_0 C^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right); \qquad (8.22)$$

При малих швидкостях руху тіла, тобто при умові V << C, вище приведене співвідношення приймає класичний вираз для кінетичної енергії тіла.

З формул (8.17) та (8.20) нескладно знайти співвідношення між повною енергією тіла E та його імпульсом P:

$$E = \sqrt{m_0^2 C^4 + P^2 C^2}\ ; \qquad (8.23)$$

Для визначення міцності стійкості будь-якої системи (наприклад - атомного ядра), застосовується поняття про енергію зв'язку.

Енергія зв'язку системи дорівнює роботі, яку треба затратити, щоб розкласти її на складові частки (наприклад, атомне ядро - на протони та нейтрони).

З урахуванням цього визначення, отримаємо наступне рівняння для енергії зв'язку-будь якої системи:

$$E_{CB} = \sum_{i=1}^{n} m_{oi}\, C^2 - M_0 C^2\ ; \qquad (8.24)$$

де m_{oi} - маса спокою i-ої частки у вільному стані; M_o - сумарна маса спокою системи, яка складається з n часток.

Закон взаємозв'язку маси та енергії отримав блискуче підтвердження в експериментах по визначенню енергії ядерних реакцій та енергії перетворень, що відбуваються з елементарними частками.

Однак треба добре розуміти, що хоч маса та енергія пов'язані одне з другим, вони є якісно відмінними властивостями матерії.

Закон взаємозв'язку маси та енергії вказує, що любі перетворення енергії тіл супроводжуються перетворенням їх маси, однак при цьому маса не перетворюється в енергію, а тільки перетворюється із однієї форми в іншу (наприклад при ланцюгових ядерних реакціях маса спокою елементарних часток перетворюється в масу електромагнітного випромінювання).

8.11. Контрольні запитання.

1. Сформулюйте механічний принцип відносності Галілея.
2. Сформулюйте постулати спеціальної теорії відносності.
3. Запишіть формули та поясніть фізичну суть перетворень координат по Лоренцу.
4. Запишіть формулу для визначення скорочення довжини тіла у релятивістській механіці.
5. Сформулюйте поняття інтервалу між двома подіями.
6. Виведіть релятивістський закон додавання швидкостей.
7. У чому полягає основна властивість інтервалу між подіями?
8. Чи виконується принцип причинності у релятивістській механіці?
9. Запишіть основний закон релятивістської динаміки.
10. Запишіть формулу для визначенні маси тіла, що рухається з біля світовою швидкістю.
11. У чому полягає релятивістський ефект сповільнення часу.

ЧАСТИНА ДРУГА
МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

ГЛАВА 9.
ВІЛЬНІ ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ.

9.1. Гармонічні коливання та їх характеристика.

Коливальним називають будь-який процес, особливістю якого є визначена повторюваність у часі. Це можуть бути хитання маятників та споруд, теплові коливання іонів у твердих тілах, ритмічні коливання серця та таке інше. Періодичними називаються коливання, при яких системи повертаються до початкового стану через однакові проміжки часу. При цьому всі фізичні величини, що характеризують коливальну систему, повторюються через ці проміжки часу.

Вільними називаються коливання, при яких система, що виведена зі стану рівноваги дією зовнішніх сил, надається сама собі без подальшої дії на неї цих зовнішніх сил. Коливання, що відбуваються під дією зовнішньої періодично змінної сили, отримали назву вимушених.

Якщо зміна з часом будь-якого фізичного параметра у коливальній системі підпорядкована закону синуса або косинуса, то такі коливання називають гармонічними.

Гармонічні коливання за законом косинуса мають таке рівняння:

$$S = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\ ; \qquad (9.1)$$

де S - відхилення деякого фізичного параметра від положення рівноваги; t - час; A - амплітуда коливання; $\omega_0 t + \varphi_0$ - фаза коливання; φ_0 - початкова фаза коливання; ω_0 - циклічна частота коливання.

Визначені параметри системи, що виконує гармонічні коливання, повторюються через деякий проміжок часу T, який отримав назву період коливання (див. рис. 9.1).

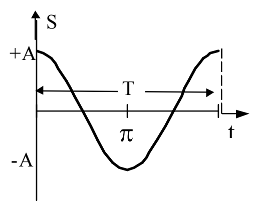

Рис. 9.1.

Період коливання - це час, за який фаза коливань отримує доданок 2π. Тобто:

$$\omega_0(t+T)+\varphi_0 = (\omega_0 t + \varphi_0) + 2\pi\ ;$$

Звідки маємо:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\ ; \qquad (9.2)$$

Кількість коливань за одиницю часу отримало назву частоти коливань. З цього визначення зрозуміло, що частота коливань ν, це параметр обернений до періоду коливань. Тобто:

$$\nu = {}^{1}/_{T}\ ; \qquad (9.3)$$

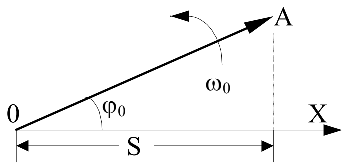

Рис. 9.2.

З виразів (9.2) і (9.3) виходить, що:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu\ ; \qquad (9.4)$$

Графічно коливання зображуються або у вигляді графіків (рис. 9.1), або у вигляді векторних діаграм (рис. 9.2).

У останньому випадку, з довільної точки О, що знаходиться на осі X, під кутом φ_0, що дорівнює початковій фазі коливань, відкладається вектор А, модуль якого дорівнює амплітуді коливань. Якщо цей вектор почне обертатись навколо точки О, з кутовою швидкістю ω_0, то проекції вектора на вісь X будуть змінюватись в межах від - A до + A. Тобто параметр S буде змінюватись з часом за виразом (9.1), тобто буде відбуватися графічне представлення коливального процесу.

Розмірність вище згаданих параметрів в системі СІ така: [T] = [c]; [ν] = [c^{-1}] = [Гц].

9.2. Диференціальне рівняння гармонічних коливань.

Визначимо значення швидкість та прискорення точки, що здійснює коливання. Для цього отримаємо першу та другу похідну по часу від параметра S, що змінюється за законом (9.1). Тоді швидкість точки, що здійснює коливання, буде дорівнювати:

$$V = \frac{dS}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})\ ; \qquad (9.5)$$

А прискорення цієї ж точки:

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)\ ; \qquad (9.6)$$

З аналізу отриманих формул можливо зробить такі висновки:

- зміна швидкості і прискорення точки відбувається з тією ж частотою, що й саме коливання, але фаза швидкості відрізняється на $\pi/2$ радіан, а фаза прискорення - на π радіан;

- при коливанні матеріальної точки максимальне значення її швидкості дорівнює $A\omega_0$, а прискорення - $A\omega^2_0$.
- коли зміщення матеріальної точки від точки рівноваги дорівнює нулю, її швидкість максимальна, а прискорення дорівнює нулю;
- коли зміщення матеріальної точки від точки рівноваги максимальне, її швидкість дорівнює нулю, а прискорення -максимальне.

Графічні закономірності зміни переміщення (I), швидкості (II) та прискорення (III) матеріальної точки, що здійснює коливальний рух, подано на рис. 9.3.

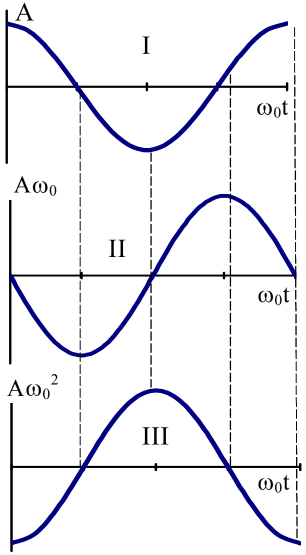

Рис. 9.3.

З формули (9.6), для визначення прискорення матеріальної точки, що здійснює коливання, отримаємо:

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \;;$$

У правій частині цього рівняння вираз $A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, являє собою не що інше, як зміщення точки від положення рівноваги, яке визначається з виразу (9.1). Тому це рівняння можливо подати у такому вигляді:

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -\omega_0^2 S \;;$$

Або:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega_0^2 S = 0 \;; \qquad (9.7)$$

Рівняння (9.7) називається диференціальним рівнянням вільного гармонічного коливання.

Механічна система виконує вільні незгасаючі гармонійні коливання тільки в тому випадку, коли її рух описується лінійним диференціальним рівнянням другого порядку виду (9.7). Така система отримала назву гармонічний осцилятор.

Гармонічний осцилятор це дуже вдала математична модель для багатьох фізичних явищ. Прикладом гармонічного осцилятора є рух пружинного та математичного маятників, коливання атомів і молекул у кристалічній решітці.

9.3. Енергія механічного гармонічного коливання.

Визначимо значення сили, що діє на матеріальну точку масою m, яка здійснює прямолінійні гармонічні коливання вздовж осі X навколо положення рівноваги, яке прийняте за початок координат. Тоді, враховуючи формулу (9.6) та визначивши S = X, прискорення точки дорівнює: $a = -\omega^2_0 X$. А значення сили F, що діє на точку, згідно з другим законом Ньютона, буде визначатись так:

$$F = -m\,\omega^2_0 X \;; \qquad (9.8)$$

З отриманої формули можливо зробить висновок, що сила F прямо пропорційна зміщенню точки від положення рівноваги та направлена у бік протилежний цьому зміщенню.

У відповідності з формулою (3.7), кінетична енергія E матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання, буде дорівнювати:

$$E = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \;; \qquad (9.9)$$

Або:

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)] \;; \qquad (9.10)$$

У відповідності з формулою (3.12), потенціальна енергія U матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання, дорівнює:

$$U = -\int_0^x F dx = m\omega_0^2 \int_0^x x\,dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0); \qquad (9.11)$$

Або:

$$U = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)] \;; \qquad (9.12)$$

Додавши до кінетичної (9.9), потенційну (9.11) енергію, отримаємо повну W енергію цієї точки:

$$W = E + U = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \;; \qquad (9.13)$$

З отриманих формул можливо зробить наступні висновки:
- коливання потенціальної і кінетичної енергії виконуються з частотою, що в два рази перевищує частоту коливання матеріальної точ-

ки;

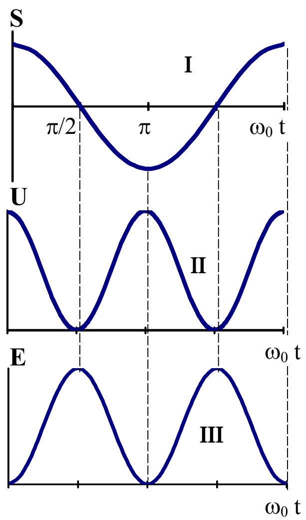

Рис. 9.4.

- коливання потенціальної та кінетичної енергії виконуються з зсувом фази на π радіан, тобто вони знаходяться у протифазі і в наслідок чого повна механічна енергія точки, що здійснює коливання, не змінюється з часом.

Графічні закономірності зміни з часом переміщення S (I), потенціальної U (II) та кінетичної E (III) енергії точки, що здійснює коливання, дано на рис. 9.4.

У процесі коливання має місце перетворення кінетичної енергії в потенціальну та навпаки. В моменти найбільшого відхилення точки від положення рівноваги (X = A) повна енергія складається тільки з потенціальної енергії. При проходженні системи через положення рівноваги (X = 0) повна енергія складається тільки з кінетичної енергії.

9.4. Маятники.

Пружинний маятник. Розглянемо пружинний маятник, який являє собою тягар масою m, що підвішений на пружині довжиною L. Тягар виконує гармонічні коливання під дією сили пружності $F_{пр}$ (рис. 9.5).

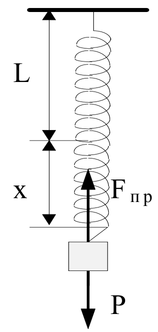

Рис. 9.5.

Тоді, згідно з другим законом Ньютона, рівняння руху тягаря можливо представити у такому вигляді:

$$m\,a = -\,k\,X\,; \qquad (9.14)$$

де a - прискорення тягаря; x - абсолютна деформація пружини; k- коефіцієнт жорсткості пружини.

З урахуванням формули (1.14), рівняння (9.14) представимо у такому вигляді:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,X\;;$$

Звідки отримаємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\;; \qquad (9.15)$$

Таким чином, ми одержали <u>диференціальне рівняння для незгасаючих гармонійних коливань пружинного маятника.</u>

Порівняння рівняння (9.15) з (9.7) дає можливість стверджувати, що циклічна частота коливань пружинного маятника дорівнює:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\;; \qquad (9.16)$$

А період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\;; \qquad (9.17)$$

Разом з тим треба пам'ятати, що отримані вище формули вірні тільки за умови коли маса тягаря суттєво перевищує масу пружини.

<u>*Фізичний маятник.*</u> Фізичним маятником називають тверде тіло, яке спроможне виконувати малі коливання під дією сили ваги навколо нерухомої осі O, що не проходить через центр інерції C тіла (див. рис. 9.6). При відхиленні маятника від положення рівноваги на деякий кут α, виникає момент сили F_1, який намагається повернути тіло у початковий стан і дорівнює:

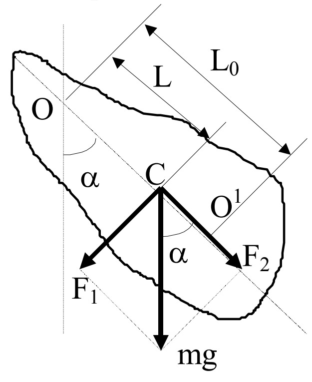

Рис. 9.6.

$$M = F_1\,L = -\,mg\,L\,\sin\alpha\;; \qquad (9.18)$$

Знак мінус у цій формулі обумовлений тим, що напрямок дії сили F_1 та α завжди протилежні. Якщо значення кута α не дуже значне, то $\sin\alpha \approx \alpha$ і формулу (9.18) можливо перетворити до наступного виду:

$$M = -\,mg\,L\,\alpha\;; \qquad (9.19)$$

У даному випадку основний закон обертального руху маятника, з урахуванням формули (1.26), буде мати наступний вигляд:

$$M = J\varepsilon = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}\ ; \qquad (9.20)$$

де J - момент інерції маятника; ε - його кутове прискорення.

Порівнявши праві частини рівнянь (9.20) та (9.19) отримаємо:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgL\alpha\ ;$$

Або:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{J}\alpha = 0\ ; \qquad (9.21)$$

Таким чином, ми одержали диференціальне рівняння для незгасаючих гармонійних коливань фізичного маятника.

Порівняння рівняння (9.21) з (9.7) дає можливість стверджувати, що циклічна частота коливань фізичного маятника дорівнює:

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{J}\ ; \qquad (9.22)$$

А період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}}\ ; \qquad (9.23)$$

де $L_0 = J / mL$ - зведена довжина фізичного маятника.

Точка O^1 (див. рис. 9.6) на прямій, що з'єднує точку підвісу з центром інерції фізичного маятника, та лежить на відстані зведеної довжини від осі обертання, називається центром хитання фізичного маятника.

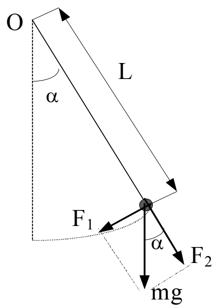

Рис. 9.7.

Математичний маятник. Математичний маятник це масивне тіло малих розмірів, яке підвішене на довгій нитці, що не розтягується, і яке виконує коливання за рахунок дії сили ваги (див. рис. 9.7).

Математичний маятник це частинний випадок фізичного маятника, уся маса якого зосереджена в одній точці - центрі мас. Тому математичний маятник можна вважати матеріальною точкою, масою

m, з моментом інерції:

$$J = m\,L^2\ ; \qquad (9.24)$$

де L - довжина нитки підвісу.

Підставивши це значення моменту інерції в рівняння (9.23) отримаємо формулу (9.25) для обчислення періоду коливань математичного маятника.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ ; \qquad (9.25)$$

З порівняння формул (9.25) та (9.23) можливо зробить висновок: якщо зведена довжина фізичного маятнику дорівнює довжині математичного маятника, то періоди їх коливання однакові. Значить зведена довжина фізичного маятнику - це довжина такого математичного маятника, період коливання якого співпадає з періодом коливань даного фізичного маятника.

В розглянутих прикладах коливальних систем загальною є наявність сили, величина якої прямо пропорційна зміщенню тіла від положення рівноваги. Усі ці сили отримали назву квазіпружних.

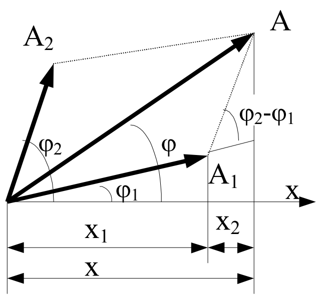

Рис. 9.8.

9.5. Додавання гармонічних коливань. Биття.

У реальних механічних системах тіло приймає участь у кількох коливаннях. Наприклад, кулька, яка підвішена до стелі вагона, що гойдається на ресорних пружинах.

Під додаванням коливань розуміють пошуки закону результуючого коливання. Розглянемо додавання двох коливань з однаковою частотою ω:

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \qquad (9.26)$$

При додаванні гармонічних коливань зручно користуватись їх графічним зображенням у вигляді векторних діаграм.

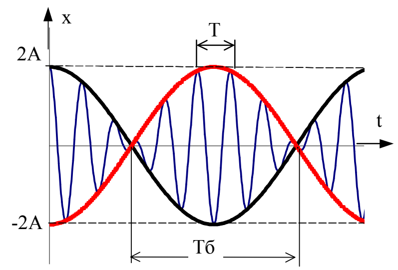

Рис. 9.9.

На рис. 9.8 приведені векторні діаграми коливань (9.26) та векторна діаграма їх результуючого коливання, рівняння якого може бути дано у наступному вигляді:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

; (9.27)

Користуючись теоремою косинусів та нескладними геометричними міркуваннями, одержимо формули для визначення амплітуди результуючого коливання A та його фази φ:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\ ; \qquad (9.2$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\ ; \qquad (9.29)$$

Тобто, у підсумку додавання двох гармонічних коливань, ми отримали одне гармонічне коливання того ж напрямку і тієї ж частоти.

Проаналізуємо отриманні формули (9.28) та (9.29).

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$; (де $m = 0,1,2,3....$). Тоді $A = A_1 + A_2$. Тобто амплітуда результуючого коливання дорівнює сумі амплітуд коливань, що додаються. А у випадку коли $A_1 = A_2$, маємо $A = 2A_2$.

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2m+1)\pi$ (де $m = 0,1,2,3....$), тоді $A = A_1 - A_2$. Тобто амплітуда результуючого коливання дорівнює різниці амплітуд коливань, що додаються. А у випадку коли $A_1 = A_2$, маємо $A = 0$.

Важливе практичне значення має випадок складання двох однаково спрямованих коливань з рівними амплітудами, які відрізняються по частоті на деяку дуже маленьку величину $\Delta\omega \ll \omega$. Якщо рівняння цих однакових коливань визначаються з формул (9.30), то у результаті їх векторного складання, неважко отримати і рівняння результуючого коливання у вигляді (9.31).

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t) \\ x_2 = A\cos[(\omega + \Delta\omega)t] \end{cases} ; \qquad (9.30)$$

$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right)\cos\omega t\ ; \qquad (9.31)$$

З формули (9.31) видно, що нове коливання це гармонічне коливання з амплітудою $\widetilde{A}$, яка не залишається постійною, а змінюється за періодичним законом з частотою $\Delta\omega/2$.

Коливання, які виникають при додаванні двох однаково спрямованих гармонічних коливань з близькими частотами, що характеризуються періодичною зміною їх амплітуди, отримали назву биття (див. рис. 9.9). Амплітуда биття визначається з формули (9.32), а період биття з формули (9.33).

$$\widetilde{A} = 2A\cos\frac{\Delta\omega\, t}{2}\ ; \qquad (9.32)$$

$$T_Б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\ ; \qquad (9.33)$$

Биття особливо поширене при розповсюдженні у просторі акустичних коливань.

У разі коли частоти коливань, що додаються, значно відрізняються, то результуюче коливання не буде гармонічним, бо різниця фаз коливань буде безперервно змінюватиметься з часом. Такі складні періодичні коливання представляють у вигляді суперпозиції одночасних гармонічних коливань з різними амплітудами, початковими фазами, а також частотами, що кратні циклічній частоті ω, у наступному вигляді:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + \\ + A_2\cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots + A_n\cos(n\omega t + \varphi_n) \qquad (9.34)$$

Таке представлення періодичної функції у вигляді (9.34) отримало назву розклад Фурьє. А складові члени розкладу Фурьє, що визначають гармонічні коливання з частотами ω, 2ω, 3ω,....., отримали відповідно назву першої (основної) другої, третьої і т.д. гармоніки складного гармонічного коливання.

9.6. Контрольні запитання.

1. Які коливання називають гармонічними ?
2. Що таке амплітуда, фаза, період та частота коливань?
3. Як пов'язані між собою період та частота коливань ?
4. Запишіть диференціальне рівняння гармонійних коливань.
5. Запишіть формулу для визначення періоду коливань фізичного та математичного маятників.
6. Приведіть формули для визначення кінетичної та потенціальної енергії гармонічних коливань.
7. Доведіть, що повна енергія гармонічного коливання є постійною величиною.
8. У чому суть методу векторного зображення коливань?
9. Запишіть формулу для визначення періоду биття.
10. Дайте визначення першої гармоніки складного гармонічного коливання.

ГЛАВА 10.
ЗГАСАЮЧІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

10.1. Диференціальне рівняння згасаючих коливань.

В реальних механічних системах дія дисипативних сил приводить до безповоротної втрати енергії. Внаслідок цього амплітуда коливань у реальній системі буде зменшуватись з часом, по мірі зменшення її механічної енергії. Саме такі коливання отримали назву згасаючих.

Диференціальне рівняння згасаючих коливань містить у собі три доданки, з яких саме другий характеризує затухання, і має вигляд:

$$\frac{d^2S}{dt^2}+2\delta\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 S=0\ ; \qquad (10.1)$$

де δ - коефіцієнт згасання коливань; ω_0 - власна частота незгасаючих коливань тієї ж системи при умові $\delta = 0$.

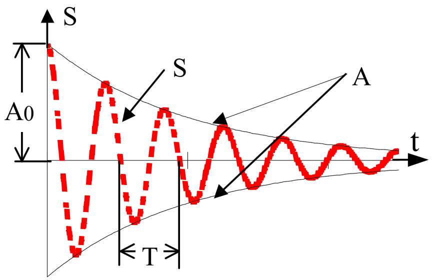

Рис. 10.1.

Розв'язок рівняння (10.1) зручно шукати у вигляді:

$$S=e^{-\delta t}\,U\ ; \qquad (10.2)$$

де U - деяка функція, що залежить від часу t.

Після підстановки (10.2) у рівняння (10.1) маємо:

$$\frac{d^2U}{dt^2}+(\omega_0^2-\delta^2)U=0; \qquad (10.3)$$

Це рівняння аналогічне рівнянню (9.7) і за умови, що $\omega^2_0 >> \delta^2$, та зробивши підстановку $\omega^2_0 - \delta^2 = \omega^2$, його розв'язком буде:

$$U=A_0\cos(\omega t+\varphi)\ ; \qquad (10.4)$$

А після підстановки (10.4) у (10.2) отримаємо формулу, що визначає закономірність зміни згасаючих коливань у часі:

$$S=A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)\ ; \qquad (10.5)$$

де A_0, φ - початкові амплітуда та фаза коливань.

Співмножник, що стоїть перед косинусом отримав назву амплітуди згасаючих коливань, графік її зміни приведений на рис. 10.1.

Тобто амплітуда згасаючих коливань дорівнює:

$$A=A_0 e^{-\delta t}\ ; \qquad (10.6)$$

У випадку коли коефіцієнт затухання коливань зростає і досягає умови $\delta^2 \approx \omega^2_0$, рух системи перестає бути періодичним. Такого роду процеси вже не будуть коливальними і вони отримали назву аперіодичних процесів.

Аперіодичний процес можна спостерігати у будь-якій механічній коливальній системі, якщо сили тертя чи опору середовища в ній достатньо великі. Наприклад, коливання маятника у в'язкому середовищі. Вид аперіодичного коливання залежить від в'язкості середовища і від сили лобового опору руху тіла, що здійснює коливання.

10.2. Період та частота згасаючих коливань. Час релаксації. Декремент згасання.

Теоретично згасаючі коливання не є періодичними, бо значення їхніх амплітуд не повторюються. Тому до таких коливань поняття періоду та частоти не повинно застосовуватися. Але якщо згасання коливань не дуже значне, тобто виконується умова $\omega^2_0 >> \delta^2$, то можливо користуватись поняттям про умовний період згасаючих коливань. Під яким розуміють проміжок часу між двома визначеними послідовними станами коливальної системи (див. рис. 10.1). Тоді з урахуванням формули (8.4) маємо:

$$T_З=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}\ ; \qquad (10.7)$$

де $T_З$, ω - період та частота згасаючих коливань.

Час релаксації τ - це проміжок часу, за який амплітуда згасаючих коливань зменшується у e разів.

Згідно з цим визначенням та формулою (10.6), отримаємо:

$$\frac{A_0}{e}=A_0 e^{-\delta\tau}\ ;\quad \Rightarrow \quad e^{-1}=e^{-\delta\tau}\ ;$$

Звідки:

$$\tau={}^{1}/_{\delta}\ ; \qquad (10.8)$$

Декремент згасання d показує у скільки разів зменшується амплітуда згасаючих коливань за час, що дорівнює одному періоду:

$$d = \frac{A(t)}{A(t+T)} \;; \qquad (10.9)$$

При t =0 з формули (10.9) та (10.5) отримаємо:

$$d = \frac{A_0 \cos\varphi}{A_0 e^{-\delta T}\cos(\omega T+\varphi)} = \frac{\cos\varphi}{e^{-\delta T}\cos(2\pi+\varphi)} = e^{\delta T} \;; \quad (10.10)$$

Натуральний логарифм від декременту згасання отримав назву логарифмічного декременту згасання і дорівнює:

$$\theta = \ln d = \ln e^{\delta T} = \delta T \;;$$

Або:

$$\theta = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\frac{\tau}{T}} = \frac{1}{N} \;; \qquad (10.11)$$

де N - кількість коливань, протягом яких їхня амплітуда зменшується у е разів.

Для кількісної характеристики енергетичної ефективності роботи коливальної системи вводиться безрозмірна величина, що називається добротністю коливальної системи Q. Добротність це відношення енергії коливання W(t) системи у момент часу t до зменшення енергії коливання за один умовний період T, помножене на 2π:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} \;; \qquad (10.12)$$

Внаслідок того, що $W(t) \approx A^2$, вище приведена формула після ряду, не суттєвих для нас перетворень, може бути доведена до наступного, більш практичного, вигляду:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \;; \qquad (10.13)$$

Розмірність вище згаданих параметрів в системі СІ: $[\delta] = [c^{-1}]$; $[\tau] = [c]$, $[Q, d, \theta]$ – це параметри безрозмірні.

10.3 Диференціальне рівняння вимушених коливань.

В коливальних системах, де діють дисипативні сили, частина енергії втрачається на виконання роботи по подоланню дії цих сил. У результаті втрат енергії амплітуда коливань системи зменшується з часом. Але якщо створити умови для поповнення втрат енергії за рахунок зовнішніх джерел, то коливання можуть стати незгасаючими. Це досягається за рахунок прикладання до коливальної системи зовнішніх сил, що періодично самі змінюються. Саме такі коливання і отримали назву вимушених.

Припустимо, що зовнішня змушувальна сила, змінюється з часом за гармонічним законом:

$$F = F_0 \cos\omega t \;; \qquad (10.13)$$

де F_0 - максимальне значення змушувальної сили.

Тоді, враховуючи рівняння (10.1) диференціальне рівняння вимушених коливань можливо представить у наступному вигляді:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\delta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = f_0 \cos\omega t \;; \qquad (10.14)$$

де $f_0 = F_0/m$; m, ω_0 - маса та циклічна частота коливальної системи, ω - циклічна частота змушувальної сили.

Рівняння (10.14) є лінійним, неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку. Його розв'язок у вигляді (10.15), являє собою суму загального розв'язку однорідного рівняння виду (10.1) та частинного розв'язку неоднорідного рівняння виду (10.14).

$$S = S_1(t) + S_2(t) \;; \quad (10.15)$$

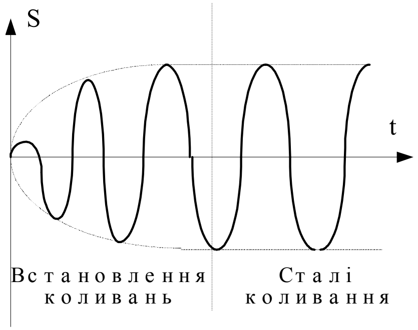

Рис. 10.2.

Розв'язок $S_1(t)$, виду (10.5), описує перехідний режим вимушених коливань і має суттєву роль тільки у початковій стадії становлення коливань, надалі ним нехтують.

Розв'язок $S_2(t)$ описує встановлені незгасаючі гармонічні коливання у такому вигляді:

$$S_2(t) = A\cos(\omega t - \varphi) \;;$$

Процес встановлення коливань називається перехідним процесом. Час протікання перехідного процесу залежить від властивостей коливальної системи По закінченні часу перехідного процесу настає режим усталених коливань (див. рис. 10.2). Ці коливання відбуваються за гармонічним законом і протікають з частотою змушувальної сили.

10.4. Амплітуда і фаза вимушених коливань. Резонанс.

Початкова фаза і амплітуда усталених коливань суттєво залежить від частоти зовнішньої змушувальної сили. Нехтуючи громіздким доказом вкажемо, що амплітуда цих усталених коливань визначається з формули (10.17), а початкова фаза коливань - з формули (10.18).

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2}} \; ; \qquad (10.17)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \; ; \qquad (10.18)$$

З формули (10.17) видно, що амплітуда усталених коливань повинна мати максимальне значення, яке досягається при мінімальному значенні знаменника. Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при певній частоті змушувальної сили називають резонансом. Мінімальне значення знаменника у формулі (10.17) знайдемо диференціюючи його по змінній ω:

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2\right] = 0 \, ;$$

Звідки маємо:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0 \, ; \qquad (10.19)$$

Це рівняння має три корені: $\omega_1 = 0$ та $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$.

Перший корінь відповідає максимуму знаменника, через що його можна залишити поза увагою. Від'ємний розв'язок рівняння (10.19) не має фізичного змісту. Тому тільки позитивний розв'язок рівняння (10.19) визначає значення резонансної частоти ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \, ; \qquad (10.20)$$

З отриманої формули видно, що при відсутності сил опору (δ = 0), резонансна частота коливальної системи співпадає з її власною частотою коливань, тобто $\omega_p = \omega_0$. Підстановкою формули (10.20) в (10.17) одержимо вираз для визначення амплітуди коливання у разі резонансу:

$$A_p = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)}} \, ; \qquad (10.21)$$

Графічні залежності амплітуди вимушених коливань від частоти для різних значень коефіцієнта згасання, що побудовані за формулою (10.22), подано на рис. 10.3. З цього рисунка видно, що при зменшенні коефіцієнта згасання δ резонансні частоти ω_p наближаються до ω_0, а максимуми резонансних кривих при цьому стають більш високими та вузькими. За умови ω → 0 усі резонансні криві наближаються до одного і того ж відмінного від нуля значення f_0/ω_0^2, яке отримало назву статичне відхилення. За умови ω → ∞ усі резонансні криві асимптотичне наближаються до нуля.

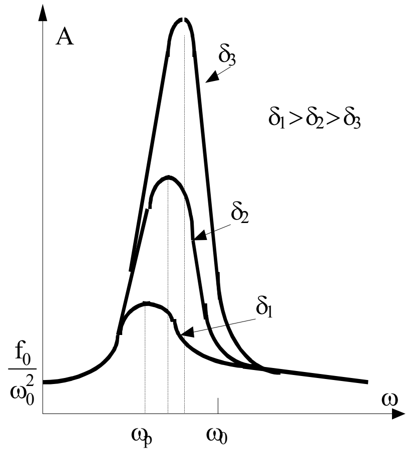

Рис. 10.3.

Сукупність приведених на рис. 10.3 криволінійних залежностей називається резонансними кривими.

За умови незначного затухання коливань ($\omega_0^2 >> \delta^2$), з формули (10.21), отримаємо вираз для визначення резонансної амплітуди:

$$A_p = \frac{f_0}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0 \; f_0}{2\delta \;\; \omega_0^2} = Q\frac{f_0}{\omega_0^2} \, ;$$

де Q - добротність коливальної системи.

Значить, добротність коливальної системи показує, у скільки разів амплітуда коливань при резонансі перевищує її статичне відхилення.

Явище резонансу необхідно враховувати при розробці різних пристроїв та споруд. Власна частота коливань механічних систем не повинна зближуватись з частотою можливих зовнішніх сил, бо у цьому випадку виникають вібрації великої амплітуди, які спроможні привести до руйнування цих пристроїв та споруд.

Теоретично є дві можливості одержання незгасаючих коливань. Перша можливість - це відсутність сил опору в коливальній системі. Однак ця можливість, очевидно, не може бути реалізована на практиці. Друга можливість - це вимушені коливання, при яких на систему діють зовнішні змушувальні сили, що не залежать від самої системи.

Та є ще одна можливість - система може сама регулювати дію зовнішніх сил таким чином, щоб у ній відбувались незгасаючі коливання. Незгасаючі коливання, що виникають внаслідок регуляції самою системою зовнішнього втручання до неї, називають автоколиваннями. Для роботи автоколивальної системи необхідно, щоб протягом того проміжку часу, поки сила діє на систему, напрямок сили та швидкість руху системи співпадали. Тоді джерело енергії виконає над коливальною системою додатну роботу (передасть їй енергію) - це додатний зворотний зв'язок. У протилежному випадку джерело віднімає енергію у системи - це від'ємний зворотний зв'язок.

Додатний зворотний зв'язок використовується для збурення автоколивань, а від'ємний - для загашення небажаних автоколивань там, де вони не потрібні. Прикладом автоколивальної системи з додатним зворотним зв'язком є годинниковий механізм, а з від'ємним – амортизатори в автомашинах.

10.5. Контрольні запитання.

1. Приведіть диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань.
2. Що спричиняє згасання коливань у механічних системах ?
3. Які коливання називають вимушеними?
4. Приведіть диференціальне рівняння вимушених коливань.
5. У чому полягає фізична суть резонансу?
6. Приведіть формулу для визначення резонансної частоти та амплітуди коливань при резонансі.
7. Який коливальний процес називають автоколиванням?
8. Що характеризує добротність коливальної системи і як вона визначається?
9. Чому дорівнює логарифмічний декремент згасання ?
10. Дайте визначення часу релаксації згасаючих коливань.

ГЛАВА 11.
ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

11.1. Пружні хвилі. Фазова швидкість.

Процес розповсюдження коливань у суцільному середовищі, періодичний у просторі та часі отримав назву хвильового процесу. При розповсюдженні хвиль частки середовища не рухаються разом із хвилею, а тільки коливаються навколо своїх положень рівноваги. При цьому від частки до частки середовища передається лише стан коливального руху та його енергія. Тому основною властивістю усіх хвиль, незалежно від їхньої природи, є перенос енергії без переносу речовини. Хвилі бувають трьох типів: пружні, електромагнітні та поверхневі.

Пружними (або механічними) називають хвилі які розповсюджуються у пружному середовищу. В залежності від напряму коливань часток речовини по відношенню до напряму розповсюдження хвильового процесу пружні хвилі розділяють на два типа: поздовжні та поперечні. Пружна хвиля називається поздовжньою, якщо напрямок коливань часток середовища співпадає з напрямком розповсюдження хвилі, і поперечною, якщо коливання виконується перпендикулярно до цього напряму (див. рис. 11.1).

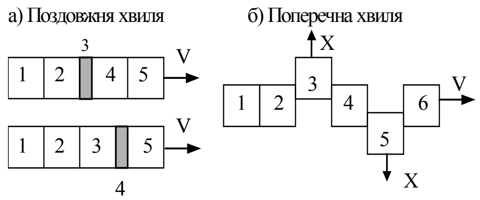

Рис. 11.1.

Поздовжні хвилі пов'язані з об'ємною деформацією пружного середовища і через це можуть розповсюджуватись у будь-якій речовині, а поперечні хвилі пов'язані з деформацією зсуву, тому вони виникають і можуть розповсюджуватися тільки у твердих тілах.

При розповсюдженні гармонічних коливань хвиля буде також гармонічною. На рис. 11.2. представлений графік пружної гармонічної хвилі, яка розповсюджується вздовж осі X з швидкістю V. Як бачимо графік хвильового процесу дуже схожий з графіком коливань, що зображений на рис. 9.1, але ці графіки абсолютно різні за фізичним змістом. Графік хвильового процесу дає залежність зміщення усіх часток середовища від відстані до джерела коливань у даний момент часу, а графік коливань - залежність зміщення даної частинки від положення рівноваги з часом.

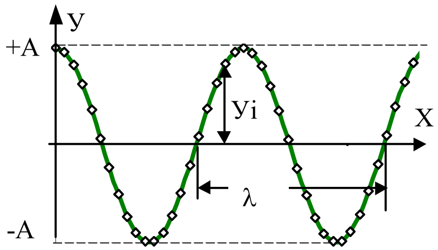

Рис. 11.2.

Відстань між двома найближчими частинками, що здійснюють коливання у одній фазі, отримала назву довжина хвилі λ. Довжина хвилі дорівнює відстані, на яку пошириться визначена фаза коливань за час рівний одному періоду:

$$\lambda = V\,T\,; \qquad (11.1)$$

де V - швидкість хвилі.

Геометричне місце точок, до яких коливання розповсюдились в момент часу t, утворює так званий хвильовий фронт. Геометричне місце точок, що коливаються в одній і тій ж фазі, називається хвильовою поверхнею. Хвильові поверхні можуть мати яку завгодно форму: площини, сфери, циліндра і т.п. Відповідно і хвилі у цьому разі називаються плоскими, сферичними, циліндричними і т.п. Хвильових поверхонь можна провести нескінченну кількість, а хвильовий фронт - тільки один, для даного моменту часу.

11.2. Рівняння бігучої хвилі.

Розглянемо плоску гармонічну хвилю, що рухається вздовж осі X, при цьому величина зміщення У залежить тільки від координати X. Нехай амплітуда коливань частинок всюди однакова, тобто енергія хвилі не поглинається середовищем. Тоді фронт хвилі у довільний момент часу буде площиною, що перпендикулярна осі X.

У площині X = 0, коливання частинки буде визначатись так:

$$У(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)\,; \qquad (11.2)$$

де A - амплітуда хвилі; φ_0 - початкова фаза коливання; ω - циклічна частота коливання; $\omega t + \varphi_0$ - фаза хвилі; t - час.

Для того, щоб знайти вид коливання частинок у площині, яка відповідає довільному значенню X, необхідно врахувати, що хвилі з її швидкістю V, потрібен деякий час τ = X/V для того, щоб вона досягла точки X. А це значить, що коливання в точці X будуть запізнюватися

на час τ по відношенню до коливань частинок у площині X = 0, тобто:

$$У(x,t) = A\cos[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = A\cos[\omega(t - X/V) + \varphi_0]\,; \qquad (11.3)$$

Отримане рівняння і є рівнянням плоскої бігучої хвилі.

Оскільки довжина хвилі дорівнює: λ = VT, то маємо:

$$\lambda = VT = \frac{V}{\nu} = 2\pi\frac{V}{\omega}\,;$$

Відношення 2π/λ отримало назву хвильового числа. Тоді, вище приведений вираз, може бути перетворений до наступного вигляду:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V}\,; \qquad (11.4)$$

де k - хвильове число.

Врахувавши вираз (11.4), рівняння бігучої хвилі набуде вигляду:

$$У(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\,; \qquad (11.5)$$

З цього рівняння видно, що на відстані довжини хвилі, зміна фази коливань дорівнює 2π. Таким чином, хвильове число дорівнює зміні фази хвилі на одиничній відстані у напрямку розповсюдження хвилі.

Припустимо, що фаза хвилі з часом не змінюється, тобто:

$$[\omega(t - {}^{X}/_{V}) + \varphi_0] = const\,; \qquad (11.6)$$

Враховуючи, що ω = const та φ_0 = const, з (11.6), маємо:

$$t - {}^{X}/_{V} = const\,;$$

Після диференціювання цього виразу отримаємо:

$$dt - {}^{dX}/_{V} = 0\,;$$

Звідки:

$$V = \frac{dx}{dt}\,; \qquad (11.7)$$

Таким чином, швидкість розповсюдження хвилі V у рівнянні бігучої хвилі це швидкість розповсюдження відповідного значення фази хвилі. Тому швидкість V отримала назву фазова швидкість.

З виразу (11.4) витікає, що V = ω/k. Тобто фазова швидкість гармонічних хвиль залежить від їх циклічної частоти. Це приводить до того, що пружні хвилі з різноманітними частотами розділяються на окремі хвилі з однаковою фазовою швидкістю. Таке явище отримало назву дисперсії хвиль.

При виведенні рівняння плоскої хвилі ми припускали, що амплітуда коливань не залежить від відстані до джерела коливань. Але дослід показує, що в однорідному середовищі відбувається згасання хвиль за експоненціальним законом.

Одержане нами раніше рівняння плоскої бігучої хвилі (11.3) є рішенням диференціального хвильового рівняння. Вид цього рівняння знайдемо, взявши частинні похідні від зміщення У(x,t) рівняння (11.3) по координаті X та часу t. Тоді:

$$\frac{\partial^2 У}{\partial X^2} = -k^2 A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) = -k^2 У$$

$$\frac{\partial^2 У}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) = -\omega^2 У$$

Звідки маємо:

$$\frac{\partial^2 У}{\partial X^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 У}{\partial t^2}\ ; \qquad (11.8)$$

Враховуючи, що згідно з (11.4) ω = Vk, з вище приведеного виразу, одержимо одновимірне диференціальне хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 У}{\partial X^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 У}{\partial t^2}\ ; \qquad (11.9)$$

Одержане диференціальне хвильове рівняння описує розповсюдження плоскої хвилі, що рухається вздовж осі X.

11.3. Хвильовий пакет. Групова швидкість.

При наявності декількох джерел коливань хвилі рухаються незалежно одна від одної, накладаючись одна на одну. При додаванні хвиль виконується принцип суперпозиції, суть якого полягає у визначенні сумарного зміщення частинки, що виникає внаслідок дії декількох хвиль, як геометричної суми зміщень, зумовлених окремо кожною з цих хвиль. Тому будь-яка хвиля може бути представлена у вигляді деякої групи хвиль, що отримала назву хвильового пакету. Хвильовий пакет це суперпозиція хвиль, які мало відрізняються одна від одної по частоті і займають в кожний момент часу обмежену частину простору.

За швидкість розповсюдження хвильового пакету приймають швидкість переміщення максимуму амплітуди хвилі, що входять у хвильовий пакет. Ця швидкість отримала назву групової швидкості і визначається таким чином:

$$u = \frac{d\omega}{dk}\ ; \qquad (11.10)$$

де U - групова швидкість хвильового пакету.

Визначимо співвідношення між фазовою та груповою швидкістю. Для цього диференціюємо рівняння (11.10) як складну функцію. Тоді, з урахуванням співвідношення ω = Vk, маємо:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(Vk)}{dk} = V + k\frac{dV}{dk} = V + k\frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}\ ; \qquad (11.11)$$

Враховуючи, що k = 2π/λ, диференціал $dk = -2\pi\lambda^{-2}d\lambda$.

Після підстановки отриманих співвідношень у (11.11), маємо:

$$u = V + \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\right)\frac{dV}{d\lambda}\ ;$$

Звідки:

$$u = V - \lambda\frac{dV}{d\lambda}\ ; \qquad (11.12)$$

Таким чином, групова швидкість може бути як більше так і менше фазової. У середовищі де дисперсії хвиль не відбувається групова швидкість дорівнює фазовій. Поняття про групову швидкість дуже важливе, бо саме ця швидкість визначається при вимірюванні дальності у радіолокації і т.п. В теорії відносності А.Ейнштейна доводиться, що групова швидкість не може перевершити швидкість світла у вакуумі, тоді як фазова швидкість може приймати любі значення.

11.4. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі.

Якщо у дану точку простору приходять дві гармонічні хвилі з амплітудами A_1 та A_2, то амплітуду результуючого коливання знаходять за формулою додавання векторів:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ ; \qquad (11.13)$$

де φ_1 - φ_2 - різниця фаз коливань у досліджуваній точці.

При цьому можливі два випадки: різниця фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$ змінюється з часом, тобто хвилі не когерентні; різниця фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$ не змінюється з часом, тобто хвилі когерентні, частоти їх коливань однакові.

При додаванні когерентних хвиль виникає явище інтерференції, яке полягає в тому, що коливання в одних точках підсилюються, а в інших послаблюються. Підсилення коливань буде в точках для яких:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2\pi n ; \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; ....) \qquad (11.14)$$

А сумарна амплітуда буде дорівнювати $A = A_1 + A_2$.

Послаблення коливань спостерігається в точках, для яких:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \pm \pi(2n+1) ; \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; ....) \qquad (11.15)$$

А сумарна амплітуда буде дорівнювати $A = A_1 - A_2$.

Геометричні місця точок, в яких коливання підсилюються або послаблюються, складають інтерференційну картину.

При накладанні некогерентних хвиль амплітуда коливань у просторі змінюється з часом, тому інтерференційна картина не виникає.

Розглянемо інтерференцію двох зустрічних хвиль з однаковими частотами та амплітудами, наприклад, хвилі, що падає на будь-яку перепону, і хвилі, що відбивається від неї. Нехай зміщення, зумовлені цими хвилями у точці X, в момент часу t, будуть дорівнювати:

$$У_1 = A_0 \cos(\omega t - kx); \qquad У_2 = A_0 \cos(\omega t + kx) ;$$

Розрахуємо результуюче зміщення:

$$У = У_1 + У_2 = A_0[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)] = (2A_0 \cos kx)\cos\omega t ;$$

Значить у точці X, мають місце коливання зі сталою амплітудою:

$$A = 2A_0 \cos kx \; ; \qquad (11.16)$$

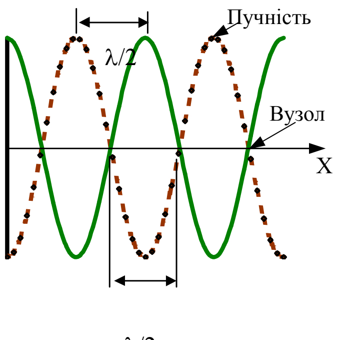

Рис. 11.3.

В точках, для яких виконується умова $kx = \pi n$ (n=0;1;2;..), коливання відбуваються з максимальною амплітудою $2A_0$. Такі точки отримали назву пучності (див. рис. 11.3).

В точках, для яких виконується умова $kx = \pi(n + 1/2)$ (n = 0; 1; 2;..), коливання не відбуваються. Ці точки отримали назву вузлів (рис. 11.3).

Положення вузлів не змінюється з часом, так що накладання двох зустрічних бігучих хвиль приводить до виникнення так званої стоячої хвилі (див. рис. 11.3). Стоячі хвилі у просторі не переміщуються і енергію не переносять.

11.5. Звукові хвилі.

Пружні хвилі, що розповсюджуються у будь-якому середовищі, і мають частоти від 20 Гц до 20 кГц, називають звуковими хвилями.

Інфразвук має частоти менше 20 Гц, а ультразвук - більше 20 кГц.

Хвилі з частотами від 20 Гц до 20 кГц, досягаючи вуха людини, викликають відчуття звуку. Люди розрізнюють звуки за висотою, тембром та гучністю. Кожній із цих суб'єктивних оцінок відповідає конкретна фізична характеристика звукової хвилі.

Під інтенсивністю I звукових хвиль розуміють середнє значення густини потоку енергії, яку переносить хвиля. Всякий звук - це не просте гармонічне коливання; він являє собою накладання гармонічних коливань з відповідним спектром частот. що називається акустичним спектром. Музикальні звуки мають лінійчатий дискретний акустичний спектр, а шуми мають суцільний спектр. Суб'єктивною характеристикою звука, пов'язаною з його інтенсивністю, є гучність звука L:

$$L = \lg\frac{I}{I_0} \; ; \qquad (11.17)$$

де I_0 - інтенсивність звука, що відповідає порогові чутності людського вуха і дорівнює для усіх частот 10^{-12} Вт/м^2.

Одиницею вимірювання рівня гучності у системі СІ є Бел.

На практиці користуються одиницею у десять разів меншою - децибелом. Інтенсивність звукових хвиль, що викликає у людському вусі звукове відчуття, відповідає рівням гучності від 0 до 130 Дб.

Швидкість звука у газах визначається з наступної формули:

$$V = \sqrt{\gamma RT / \mu} \; ; \qquad (11.18)$$

де γ, μ - показник адіабати та молярна маса газу; R - універсальна газова стала; T - термодинамічна температура газу.

Завдяки високим частотам (ν>20 кГц), а значить незначній довжині хвилі, ультразвукові хвилі можуть бути отримані у вигляді точно направлених пучків, що обумовило їх широке застосування у науці і техніці. Наприклад, у гідролокації, ультразвуковій дефектоскопії, у медицині та т. і. Отримують ультразвук як правило за допомогою оберненого п'єзоелектричного ефекту.

11.6. Ефект Доплера.

Залежність частоти хвилі, що сприймається спостерігачем, у відповідністю з швидкістю руху спостерігача та джерела хвиль, отримало назву ефекту Доплера.

Розглянемо розповсюдження хвиль у нерухомому середовищі, вважаючи, що рух спостерігача (приймача) та джерела хвиль проходить вздовж прямої, що їх з'єднує. Швидкість руху джерела $V_{дж}$ будемо вважати додатною, якщо джерело рухається до приймача, та від'ємною при віддаленні приймача та джерела хвиль один від одного.

Розглянемо декілька найбільш типових випадків.

1. Джерело та приймач нерухомі відносно середовища ($V_{дж}=V_{пр}=0$).

Якщо V_0 швидкість розповсюдження хвилі відносно середовища, а частота коливань джерела хвиль дорівнює ν_0, то довжина хвилі буде дорівнювати $\lambda = V_0T = V_0/\nu_0$. За деякий час хвиля дійде до приймача і збурить коливання його звукочутливого елемента з частотою:

$$\nu_{пр} = \frac{V_0}{\lambda} = \nu_0 \;; \qquad (11.19)$$

Таким чином, частота хвилі яку зареєструє приймач $\nu_{пр}$ буде співпадати з частотою хвилі ν_0, що випромінюється джерелом.

2. Приймач наближається до джерела, яке нерухоме ($V_{дж}=0$, $V_{пр}>0$).

У цьому випадку швидкість розповсюдження хвилі відносно приймача стане рівною $V = V_0 + V_{пр}$. Завдяки тому, що довжина хвилі при цьому не змінюється, маємо:

$$\nu_{пр} = \frac{V_0 + V_{пр}}{\lambda} = \frac{(V_0 + V_{пр})\,\nu_0}{V_0} \;; \qquad (11.20)$$

Таким чином, частота коливань, яку зареєструє приймач $\nu_{пр}$ буде значно більшою, ніж частота коливань джерела хвиль.

3. Джерело наближається до нерухомого приймача ($V_{дж}>0$, $V_{пр}=0$).

У цьому випадку, за час рівний одному періоду, хвиля пройде шлях, що дорівнює довжині її хвилі ($VT = \lambda$) незалежно від того

рухається джерело хвиль чи ні. За цей же час джерело хвиль пройде у напрямку розповсюджування хвилі шлях, що дорівнює $V_{дж}T$ (див. рис. 11.4). Тобто довжина хвилі скоротиться і буде дорівнювати:

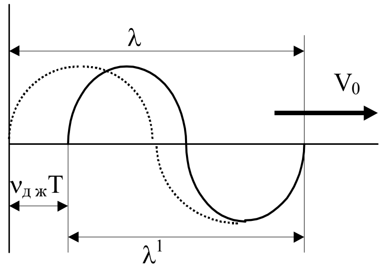

Рис. 11.4.

$$\lambda^1 = \lambda - V_{дж}T = (V - V_0)\,T\;;$$

Звідки маємо:

$$\nu_{пр} = \frac{V}{\lambda^1} = \frac{V\nu_0}{(V - V_{дж})}\;; \qquad (11.21)$$

Тобто частота коливань, яку зареєструє приймач, буде більшою ніж частота коливань у джерелі хвиль.

З результатів, що ми отримали у випадках 1-3, нескладно отримати загальну формулу для визначення частоти коливань, що фіксуються приймачем у загальному випадку:

$$\nu_{пр} = \frac{(V \pm V_{дж})\,\nu_0}{(V \mp V_{дж})}\;; \qquad (11.22)$$

Знак плюс у чисельнику вище приведеного виразу відповідає наближенню приймача до джерела, знак мінус - їх віддаленню, а в знаменнику - навпаки. Таким чином, при наближенні джерела коливань і приймача один до одного, частота, яку сприймає приймач, буде більша від частоти коливань джерела хвиль. І навпаки при віддаленні приймача і джерела коливань один від одного, частота сприйняття коливань приймачем зменшується.

11.7. Контрольні запитання.

1. Що називається хвильовим процесом? Дайте визначення поздовжніх та поперечних хвиль.
2. Запишіть формулу для визначення фазова швидкість хвилі.
3. Яке рівняння має плоска бігуча гармонічна хвиля?
4. У чому суть явища інтерференції хвиль? Запишіть умови для існування максимуму і мінімуму амплітуди при інтерференції.
5. Які звукові хвилі Ви знаєте?
6. Що собою являє хвильовий пакет? Які його характеристики?
7. Наведіть приклади використання ультразвукових хвиль.

ЧАСТИНА ТРЕТЯ
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА

Молекулярна фізика та термодинаміка - це особливий розділ фізики, що вивчає макроскопічні властивості речовини виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень про її будову. Тобто припускається, що усі тіла являють собою сукупність дуже великого числа атомів та молекул, які знаходяться у безперервному русі.

Ідея про атомну будову речовини вперше висловлена давньогрецьким філософом Демокрітом (460 -370 р.р. до н.е). Однак лише у середині XIX століття ця ідея отримала завершене втілення у наукових працях видатних фізиків того часу Р.Клаузіуса (1822-1888), Дж. Максвелла (1831-1879), Л.Больцмана (1844-1906).

Атомно-молекулярна будова речовини підтверджується таким класичним дослідом, як броунівський рух, та вивчається за допомогою таких методів, як електронна мікроскопія, рентгеноструктурний аналіз та таке інше.

ГЛАВА 12.
ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

12.1. Статистичний та термодинамічний методи дослідження.

Для вивчення процесів руху атомів і молекул у речовині, застосовують два якісно різних методи, що взаємно доповнюють один одного: статистичний і термодинамічний. Перший лежить в основі молекулярної фізики, другий - термодинаміки.

Молекулярна фізика вивчає явища, які являються результатом сукупної дії великого числа молекул та атомів, але властивості цієї сукупності не дорівнюють властивостям однієї молекули, через що для визначення цих властивостей використовується статистичний метод. Використання статистичного методу в молекулярній фізиці пояснюється тим, що неможливо спостерігати за рухом кожної окремої молекули чи атома, а сукупність великого числа молекул набуває таких нових властивостей, яких не мають окремі молекули.

Статистичний метод базується на тому, що властивості сукупності великого числа молекул є макроскопічними і в кінцевому рахунку визначаються мікроскопічними властивостями окремої молекули.

Наприклад, температура газу визначається швидкістю руху його окремих молекул. Однак у окремі моменти часу різні молекули мають різні швидкості руху, тому температура газу може бути визначена через середнє значення швидкості усіх молекул газу. Але говорить про температуру однієї молекули газу - абсурд.

Статистичний метод базується на використанні теорії імовірності та визначених моделях будови досліджуваних систем. У системі, яка складається з великої кількості часток, є деяке середнє значення фізичних параметрів які характеризують усю сукупність у цілому. Це насамперед середнє арифметичне (12.1) і середнє квадратичне (12.2).

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i ; \qquad (12.1)$$

$$\overline{X}_{KB} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} ; \qquad (12.2)$$

де $\overline{X}$, $\overline{X}_{KB}$ - середнє арифметичне та середнє квадратичне деякого фізичного параметра X_i; n - кількість визначень цього параметра.

Розділ фізики у якому за допомогою статистичного метода вивчаються фізичні властивості макроскопічних систем називається статистичною фізикою.

Термодинаміка вивчає загальні властивості макроскопічних систем, без врахування їх внутрішньої будови та характеру руху часток, що створюють ці системи. Тому при використанні термодинамічного методу не розглядається внутрішня будова речовини та характер руху окремих її часток. Термодинамічний метод ґрунтується на аналізі умов та кількісних співвідношень при різноманітних перетвореннях енергії, що відбуваються у системі. Співвідношення між різними видами енергії дозволяє вивчати фізичні властивості макроскопічних систем у самих різноманітних умовах. Термодинамічна система це сукупність макроскопічних тіл, які можуть обмінюватися енергією як між собою, так і з зовнішніми тілами.

Стан термодинамічної системи задається за допомогою трьох термодинамічних параметрів, а саме: тиску (P), об’єму (V) і температури (T). У системі СІ ці параметри вимірюють у таких одиницях.

Термодинамічна температура T - у кельвінах (К), причому O^0 С по шкалі Цельсія відповідає 273^0 К по шкалі Кельвіна. Тобто:

$$T = 273 + t^0 ; \qquad (12.3)$$

Об’єм (V) - у кубічних метрах. Тиск (P) - у паскалях (Па).

Одна фізична атмосфера (атм) відповідає тиску у 101325 Па, а одна технічна атмосфера (ат) - 98066,5 Па. Крім того тиск також вимірюють у міліметрах ртутного та водяного стовпа.

Кількість речовини вимірюється у молях. Один моль це кількість речовини, яка складається з такої кількості молекул та атомів, скільки їх входить до складу 12 грамів ізотопу вуглецю.

Термодинамічним процесом називається любе перетворення хоч би одного з термодинамічних параметрів, що відбувається у системі.

Рівноважний стан термодинамічної системи це такий її стан який не змінюється з часом, при цьому стаціонарність стану системи не пов’язана з процесами, що відбуваються у зовнішньому середовищі.

12.2. Дослідні закони ідеального газу.

У молекулярно-кінетичній теорії використовується модель ідеального газу, що має відповідати наступним умовам:

1. Власний об’єм молекул газу дуже малий у порівнянні з об’ємом посудини, в якій він знаходиться.

2. Між молекулами газу відсутні сили взаємодії.

3. Зіткнення між молекулами, а також їхні зіткнення зі стінками посудини, в якій знаходиться газ, є абсолютно пружними.

Звичайно, реальні гази відрізняються від ідеальних по усіх вище наведених умовах, але реальний газ можна наблизити до моделі ідеального, наприклад у випадку, коли концентрація молекул мала, а температура газу висока. Окрім цього реальні гази можуть буди наближені до моделі ідеального газу за допомогою різноманітних поправок.

Дослідним шляхом, задовго до появлення молекулярно-кінетичної теорії, була відкрита ціла низка законів, що описують властивості ідеальних газів. Нагадаємо основні з них.

Закон Авогадро: один моль будь-якого газу при однаковому тиску та температурі займає однаковий об’єм. При нормальних умовах (P = 1 10^5 Па, T =273 К), цей об’єм дорівнює 22,4 10^{-3} $м^3$. З цього виходить, що у одному молі будь якого газу міститься одне й те ж число молекул, яке називають сталою Авогадро: $N_A = 6{,}02\ 10^{23}$ $моль^{-1}$.

Закон Дальтона: тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків кожного з газів, що до неї входять:

$$P = P_1 + P_2 + \quad + P_n ; \qquad (12.4)$$

де P_i - парціальні тиски, тобто тиски які створював би кожний газ суміші, якби він один займав об’єм, у якому знаходиться уся суміш.

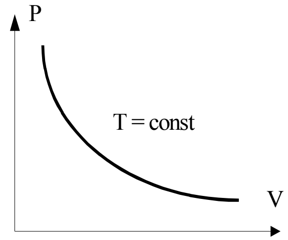

Рис. 12.1.

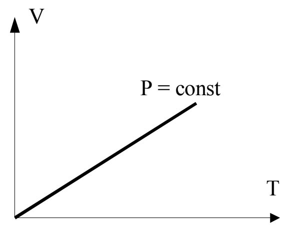

Рис. 12.2.

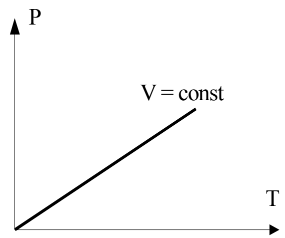

Рис. 12.3.

Ізопроцесами називають такі термодинамічні процеси, які відбуваються у системі з постійною масою газу при будь-якому незмінному термодинамічному параметрі.

Якщо у термодинамічному процесі не змінюється температура, тоді він називається ізотермічним. При цьому процесі добуток тиску газу на його об’єм є величина стала:

$$P\,V = const ; \qquad (12.5)$$

На рис. 12.1 приведена ізотерма, що відображає залежність між параметрами P і V при ізотермічному процесі.

Якщо у термодинамічному процесі не змінюється тиск, то він називається ізобарним. При цьому процесі об’єм газу лінійно змінюється зі зміною його температури:

$$V_2\,T_1 = V_1\,T_2 ; \qquad (12.6)$$

На рис. 12.2 приведена ізобара, що відображає залежність між параметрами V і T при ізобарному процесі.

Якщо у термодинамічному процесі не змінюється об’єм газу, то він називається ізохорним. При цьому процесі тиск газу лінійно змінюється зі міною його температури:

$$P_2\,T_1 = P_1\,T_2 ; \qquad (12.7)$$

На рис. 12.3 приведена ізохора, що відображає залежність між параметрами P і T при ізохорному процесі.

Якщо у термодинамічному процесі не відбувається теплообмін з зовнішнім середовищем, то такий процес називається адіабатичним.

12.3. Рівняння Клапейрона-Менделєєва.

Нехай деяка маса газу послідовно перетворюється у ізотермічному (1-2) та ізохорному (2-3) процесах (див рис. 12.4). Виходячи з вище приведених законів для ізотермічного та ізохорного процесів маємо:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \text{ та } P_2 T_3 = P_3 T_2 ;$$

З цих двох рівнянь отримаємо:

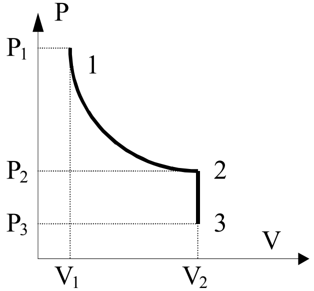

Рис. 12.4.

$$P_1 V_1 = \frac{T_2}{T_3} P_3 V_2 ;$$

Однак: $T_1 = T_2$, бо процес (1-2) ізотермічний, а $V_3 = V_2$, бо процес (2-3) ізохорний. Тоді маємо:

$$P_1 V_1 = \frac{T_1}{T_3} P_3 V_3 ; \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_3 V_3}{T_3} ;$$

Враховуючи, що стан газу в точках 1, 2 та 3 нами вибраний довільно, ми можемо зробити висновок, що для даної маси газу:

$$\frac{P V}{T} = \text{const} = B ; \qquad (12.8)$$

Вираз (12.8) отримав назву рівняння Клапейрона, в якому B - це газова стала, що має різні значення для різних газів.

Однак згідно з законом Авогадро, при однакових P і T, один моль любих газів займає однаковий об'єм V_μ, тому стала B у цьому випадку буде однакова для любих газів. Ця єдина стала отримала назву універсальна газова стала R. Вона дорівнює R=8,31 Дж/моль К.

Тоді вираз (12.8) можливо представити у наступному вигляді:

$$P V_\mu = R T ; \qquad (12.9)$$

Вираз (12.9) і отримав назву рівняння Клапейрона-Менделєєва.

Об'єм довільної маси газу дорівнює:

$$V = \frac{m}{\mu} V_\mu ; \qquad (12.10)$$

де μ - молярна маса, кг/моль; m - маса газу, кг.

Відношення $m/\mu = \nu$ дорівнює кількості речовини. Тоді рівняння Клапейрона-Менделєєва для любої маси газу можливо представити у наступному вигляді:

$$P V = \frac{m}{\mu} R T = \nu R T ; \qquad (12.11)$$

Відношення універсальної газової сталої до сталої Авогадро отримало назву стала Больцмана. Вона дорівнює $k = R/N_A = 1{,}38\ 10^{-23}$ Дж/К. Тоді з рівняння Клапейрона-Менделєєва для одного моля газу маємо:

$$P = \frac{R T}{V_\mu} = \frac{N_A k T}{V_\mu} ; \qquad (12.12)$$

Враховуючи, що відношення N_A/V_μ визначає концентрацію n молекул у газі, вираз (12.12) можливо представити у такому вигляді:

$$P = n k T ; \qquad (12.13)$$

Тобто тиск газу прямо пропорційний концентрації в ньому молекул.

12.4. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів.

Розглянемо одноатомний ідеальний газ, який знаходиться у деякій посудині (див. рис. 12.5). Для визначення тиску, який спричиняють газові молекули на стінки посудини відокремимо на її поверхні деяку елементарну площадку ΔS. При пружному зіткненні з стінкою посудини, кожна з молекул змінює напрямок свого руху на протилежний, передаючи при цьому, відповідно з законом збереження імпульсу, стінці посудини імпульс, що визначається з наступного рівняння:

$$\Delta K = K_1 - K_2 = m_0 V_{кв} - (- m_0 V_{кв}) = 2 m_0 V_{кв} ; \qquad (12.14)$$

де K_i - імпульс молекули; m_0 - маса молекули; $V_{кв}$ - середньоквадратична швидкість молекули газу.

За час Δt площадки ΔS мають змогу досягнути тільки ті молекули, що знаходяться в об'ємі V:

$$V = V_{кв}\ \Delta t\ \Delta S;$$

Число таких молекул в об'ємі ΔV дорівнює:

$$N_0 = n\ V;$$

де n - концентрація молекул в газі.

Припустимо, що рух молекул у газі упорядкований та рівномірний у всіх шести напрямках системи координат Декарта. Відповідно до цього можна стверджувати, що вздовж додатного напрямку осі X рухаються молекули у кількості $N = N_0/6$. Тоді сумарний імпульс $\sum K_i$, що діє на площадку ΔS можливо визначити таким чином:

$$\sum K_i = 2m_0\ V_{кв}\ N = (1/3)\ m_0\ V_{кв}^2\ n\ \Delta t\ \Delta S;$$

Враховуючи, що тиск це відношення сили F до площі ΔS, а сила дорівнює відношенню імпульсу до часу його зміни, отримаємо вираз для визначення тиску газу на стінку посудини:

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\sum K_i}{\Delta S\ \Delta t} = \frac{1}{3}\ m_0 V_{кв}^2\ n; \qquad (12.15)$$

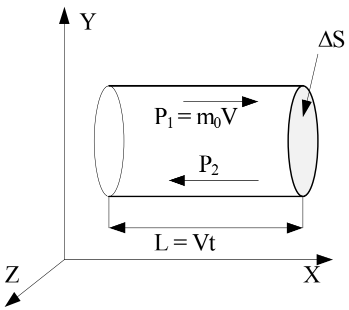

Рис. 12.5.

Так, як $n = N/V$, то вище приведений вираз можливо представити у наступному вигляді:

$$PV = {}^1/_3\ m_0\ V_{кв}^2\ N; \qquad (12.16)$$

Враховуючи, що $Nm_0 = m$, маємо:

$$PV = {}^1/_3\ mV_{кв}^2; \qquad (12.17)$$

Або:

$$PV = {}^2/_3\ E_к; \qquad (12.18)$$

де m - маса усього газу; $E_к$ - сумарна кінетична енергія поступального руху усіх молекул газу.

Вирази 12.17 та 12.18 отримали назву <u>основні рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів.</u>

Розглянемо один моль ідеального газу. Порівнявши праві частини рівняння Клапейрона-Менделєєва та рівняння (12.17), маємо:

$$RT = = {}^1/_3\ \mu\ V_{кв}^2; \qquad (12.19)$$

де μ - молярна маса газу.

З рівняння (12.19) отримаємо вираз для визначення середньоквадратичної швидкості молекули ідеального газу:

$$V_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \qquad (12.20)$$

Або, з урахуванням визначення сталої Больцмана, маємо:

$$V_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}; \qquad (12.21)$$

де k - стала Больцмана; N_A - стала Авогадро.

Не складно визначити, що при кімнатній температурі значення $V_{кв}$, наприклад кисню, буде складати біля 500 м/с.

Враховуючи вираз (12.21), середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули ідеального газу ε_0, може бути визначена з наступного рівняння:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} m_0\ V_{кв}^2 = \frac{m_0\ 3kT}{2\ m_0} = \frac{3kT}{2};$$

Тобто:

$$\varepsilon_0 = {}^3/_2\ kT; \qquad (12.22)$$

Термодинамічна температура не може приймати від'ємних значень. Дійсно, при T = 0, як видно з формул (12.21) та (12.22), швидкість та кінетична енергія молекул ідеального газу також стає нульовою ($E_0 = 0$, $V_{кв} = 0$), а поступальний рух молекул повністю припиняється. Тому нульове значення термодинамічної температури і отримало назву <u>абсолютного нуля.</u>

12.5. Контрольні запитання.

1. Наведіть рівняння Клапейрона-Менделєєва.
2. Яким умовам відповідає модель ідеального газу?
3. Запишіть основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів.
4. В чому полягає фізичний зміст середньоквадратичної швидкості молекул ідеального газу?
5. Поясніть фізичний зміст термодинамічної температури.
6. Наведіть закон Дальтона для суміші ідеальних газів.

ГЛАВА 13.
СТАТИСТИЧНІ РОЗПОДІЛИ І ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ

13.1. Закон Максвелла для розподілу молекул ідеального газу за швидкостями та енергіями.

Внаслідок хаотичного руху молекули весь час стикаються одна з одною, що призводить до постійної зміни їх швидкостей, як за модулем так і за напрямком. Але середньоквадратична швидкість руху молекул при постійній температурі газу залишається сталою. Це пояснюється встановленням у газах деякого стаціонарного статистичного розподілу молекул за швидкостями, у відповідності з визначеним статистичним законом, що не змінюється з часом. Цей закон теоретично вивів англійський фізик Дж. Максвелл (1831-1879).

Та спочатку більш детально розглянемо поняття про статистичний розподіл молекул за швидкостями у газі. Нехай у деякому газі є 1000 молекул. З них 500 мають швидкість U_1, 200 - швидкість U_2, 200 - швидкість U_3, 50 - швидкість U_4, 50 - швидкість U_5. При цьому $U_5 > U_2 > U_1 > U_3 > U_4$. Тоді відносне число молекул у газі з відповідними швидкостями буде дорівнювати:

$f(U_1) = {}^{500}/_{1000} = 0{,}5$; $f(U_2) = {}^{200}/_{1000} = 0{,}2$; $f(U_3) = {}^{200}/_{1000} = 0{,}2$;
$f(U_4) = {}^{50}/_{1000} = 0{,}05$; $f(U_5) = {}^{50}/_{1000} = 0{,}05$;

Якщо тепер побудувати графік залежності відносного числа молекул від їхніх швидкостей (див. рис. 13.1), то ми матимемо графічне відображення деякої функції f(U), що отримала назву функція розподілу молекул за швидкостями.

Д.Максвелл встановив, що у газах розподіл молекул за швидкостями не змінюється з часом і відповідає статистичному закону:

$$f(U) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} U^2 e^{-\frac{m_0 U^2}{2kT}}; \quad (13.1)$$

де m_0, U - маса та швидкість молекули;
T - температура газу.

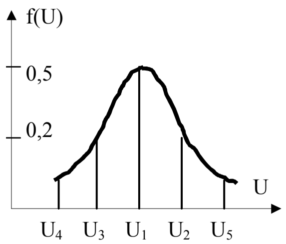

Рис. 13.1.

На рис. 13.2 дано графічний вид функції (13.1), що отримала назву функція розподілу Максвелла.

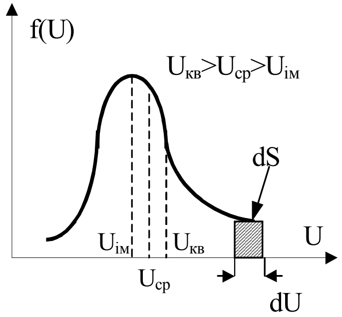

Рис. 13.2.

Заштрихована площа криволінійної трапеції на рис 13.2 визначає кількість молекул, що мають швидкості від U до U+dU і може бути обчислена так:

$$dN(U) = N\int_{U}^{U+dU} f(U)dU; \quad (13.2)$$

де N - загальна кількість молекул, що знаходяться у даному об'ємі газу.

З графіка, який приведений на рис. 13.2, можливо зробить висновок, що функція розподілу Максвелла наближається до нульового значення при U = 0 та U = ∞, проходячи через максимум при деякій швидкості $U_{ім}$. Ця швидкість отримала назву найбільш імовірна, бо її мають найбільше число молекул.

Значення найбільш імовірної швидкості можливо визначити з умови прирівнювання нулю похідної по швидкості від функції виду (13.1). Минаючи досить громіздкі викладки, отримаємо:

$$U_{ім} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}; \quad (13.3)$$

Користуючись формулою розподілу Максвелла, можливо обчислити і середньоарифметичну швидкість молекул газу:

$$U_{ср} = \sqrt{\frac{8kT}{m_0\pi}} = \sqrt{\frac{8RT}{\mu\pi}}; \quad (13.4)$$

Крім цього, як ми вже казали, люба сукупність молекул газу характеризується і середньоквадратичною швидкістю:

$$U_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \quad (13.5)$$

Як видно з вище приведених формул, найменшою з швидкостей являється найбільш імовірна, а найбільшою – середньоквадратична швидкість.

Швидкість молекули визначає значення її кінетичної енергії поступального руху E. Тому функція Максвелла для розподілу молекул за швидкостями може бути перетворена у <u>функцію Максвела для розподілу молекул за енергією f(E).</u>

Розподіл молекул газу за енергією буде визначати відносну долю молекул, в одиниці об'єму газу, які мають кінетичну енергію поступального руху в інтервалі від E до E+dE. Тобто:

$$f(E)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{E}\,e^{-\frac{E}{kT}} \quad ; \qquad (13.6)$$

де E - кінетична енергія поступального руху однієї молекули; T - термодинамічна температура.

<u>13.2. Барометрична формула. Закон Больцмана.</u>

Коли ми виводили основний закон молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу ми припускали, що на молекули газу не діють зовнішні сили і тому вони рівномірно розподілені по усьому об'єму.

Але таке припущення зовсім не доречне коли мова йде про таку різновидність газу, як земна атмосфера. Дійсно, згідно з законом всесвітнього тяжіння на всі матеріальні об'єкти, що знаходяться у полі гравітаційних сил Землі, діють сили гравітаційного поля, напруженість якого по мірі віддалення від центра Землі зменшується. Очевидно, що їхня дія впливає на газові молекули земної атмосфери, які спричиняють атмосферний тиск. Тому, як було встановлено експериментально, атмосферний тиск з висотою зменшується.

Отримаємо закон зміни атмосферного тиску з висотою, вважаючи для простоти, що температура атмосферного повітря на усіх висотах одна і та ж, поле сил тяжіння однорідне, а маса усіх молекул однакова. Для цього відокремимо у повітрі атмосферний стовп висотою h з площею основи, що дорівнює одиниці, тобто ΔS = 1 (див. рис. 13.3). Нехай на висоті h тиск повітря буде становить P, а на висоті h + dh він буде дорівнювати P + dP. При цьому dP< 0, бо, як ми вже казали тиск повітря з висотою зменшується. Різниця у атмосферному тиску P та P + dP, обумовлена вагою газу, що знаходиться у об'ємі геометричної фігури висотою dh та площею основи ΔS.

Тому маємо:

$$P - (P + dP) = \rho\, g\, dh\, \Delta S\ ; \qquad (13.7)$$

де ρ - густина повітря, кг/м^3; g - прискорення вільного падіння, м/с^2.

Звідки:

$$- dP = \rho\, g\, dh\ ; \qquad (13.8)$$

Далі для визначення густини повітря скористуємось рівнянням Клапейрона-Менделєєва:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT\ ;$$

Враховуючи, що відношення маси газу m до його об'єму V визначає густину газу ρ, з рівняння Клапейрона-Менделєєва, маємо:

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}\ ; \qquad (13.9)$$

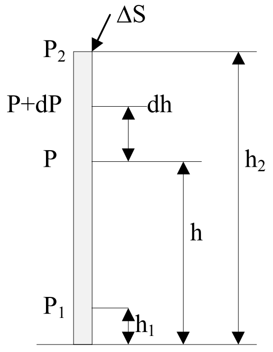

Рис. 13.3.

Тоді вираз (13.8) можливо представить у наступному вигляді:

$$dP = -\frac{P\mu}{RT} g\, dh\ ;$$

А після відокремлення перемінних отримаємо:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dh\ ;$$

Цей вираз інтегруємо у таких границях:

$$\int_{P_1}^{P_2}\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT}\int_{h_1}^{h_2} dh\ ;$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\ln P_2 - \ln P_1 = \ln\frac{P_2}{P_1} = -\frac{\mu g}{RT}(h_2 - h_1);$$

І у результаті:

$$P_2 = P_1\, e^{-\frac{\mu g (h_2 - h_1)}{RT}}\ ; \qquad (13.10)$$

Це рівняння отримало назву <u>барометрична формула.</u>

Барометрична формула дозволяє визначати тиск повітря в залежності від висоти заміру. Постільки на практиці за рівень відліку приймають рівень моря, де h_1=0, а тиск повітря дорівнює P_0, то барометрична формула може бути перетворена до такого вигляду:

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}; \qquad (13.11)$$

Перетворимо рівняння (13.11) за допомогою співвідношення P=nkT. Враховуючи, що параметри k та T - це константи, маємо:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}; \qquad (13.12)$$

де n_0 - концентрація молекул у повітрі на рівні моря.

Враховуючи співвідношення $\mu = m_0 N_A$ та $R = k N_A$, рівняння (13.12) можливо перетворити таким чином:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h N_A}{k N_A T}} = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}};$$

Чисельник m_0gh - це потенціальна енергія однієї молекули E. Тоді вище приведене рівняння можливо представити таким чином:

$$n = n_0 e^{-\frac{E}{kT}}; \qquad (13.13)$$

Цей вираз отримав назву закон Больцмана для розподілу молекул газу у зовнішньому потенціальному полі. Закон Больцмана стверджує, що при постійній температурі густина газу (концентрація молекул) більше там, де менша потенціальна енергія його молекул.

13.3. Середнє число зіткнень та середня довжина вільного пробігу газових молекул.

Як ми вже відмічали, молекули газу знаходяться у хаотичному русі, безперервно стикаючись одна з одною. Шлях який проходить молекула між двома послідовними зіткненнями отримав назву середня довжина вільного пробігу *l*. Мінімальна відстань на яку можуть зблизитись при зіткненні центри двох молекул діаметром d_1 та d_2, отримала назву ефективний діаметр молекул d.

Молекули газу, як правило, не торкаються одна одної при зіткненні, бо при цьому значно збільшуються сили молекулярного відштовхування. Тому $d > d_1 + d_2$.

Розглянемо рух молекул у деякому газі (рис. 13.4). Припустимо, що усі молекули газу мають діаметр d_1 і є нерухомими, крім однієї фіксованої молекули, що рухається відносно інших молекул з середньою швидкістю U. За час t = 1 с., ця молекула пройде шлях, що дорівнює:

$$S = U\,t = U;$$

де U - середня арифметична швидкість молекул.

За цю секунду молекула здійснить Z зіткнень, тому середня довжина вільного пробігу буде дорівнювати $\langle l \rangle = U/Z$, а сфера молекулярної дії фіксованої молекули займе в просторі об'єм, що дорівнює:

$$V = \pi d^2 U; \qquad (13.14)$$

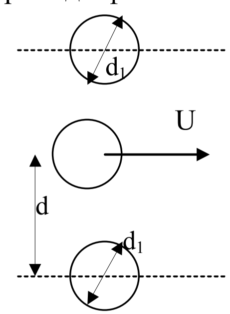

Рис. 13.4.

де πd^2 - ефективний перетин молекули.

Якщо концентрація молекул у газі складає n, то кількість їх зіткнень об'ємі V буде дорівнювати:

$$Z = \pi d^2 U n;$$

Якщо врахувати рух молекул з зовнішнього об'єму до об'єму, що розглядається, то їх кількість треба збільшити на величину $\sqrt{2}$. Тоді кількість зіткнень молекул за одну секунду буде:

$$Z = \sqrt{2}\,\pi d^2 U n; \qquad (13.15)$$

Для обчислення середньої довжини вільного пробігу молекул газу, поділимо середню відстань, що проходить молекула за одну секунду на кількість її зіткнень:

$$\ell = \frac{U}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}; \qquad (13.16)$$

Тобто середня довжина вільного пробігу газових молекул обернено пропорційна концентрації молекул у газі, а значить і його тиску.

13.4. Явища переносу в газах.

Особливі незворотні термодинамічні процеси, що відбуваються у нерівноважних системах, внаслідок яких відбувається перенос у просторі маси, енергії, імпульсу отримали назву явища переносу.

До цих явищ належить теплопровідність (вона обумовлена переносом енергії), дифузія (вона обумовлена переносом маси), в'язкість (вона обумовлена переносом імпульсу). В основі усіх цих процесів лежить одне й теж саме явище, а саме взаємне проникнення молекул одного виду в середовище молекул іншого виду у процесі їх хаотичного руху та зіткнень одна з одною. Послідовно розглянемо усі ці явища.

1. Теплопровідність - це явище передачі тепла з однієї області речовини до другої за рахунок зіткнень молекул між собою, що обумовлює зміну їх кінетичної енергії.

За допомогою експериментів було встановлено (див. рис. 13.5): кількість теплоти Q, що переноситься між двома площадками у напрямку нормальному до них, прямо пропорційна площі ΔS, часу Δt та градієнту температури між цими площадками:

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t \;; \qquad (13.17)$$

де λ - коефіцієнт теплопровідності, Дж/м К с; $^{dT}/_{dX}$ - градієнт температури, К/м.

Знак "-" у формулі (13.17) вказує на те, що перенос теплоти при теплопровідності здійснюється у напрямку спаду температури.

Коефіцієнт теплопровідності чисельно дорівнює кількості теплоти, яка переноситься через одиницю площі за одиницю часу, при градієнті температури, що також дорівнює одиниці.

Відношення теплового потоку Q до площі площадки ΔS та часу Δt називається питомим тепловим потоком q:

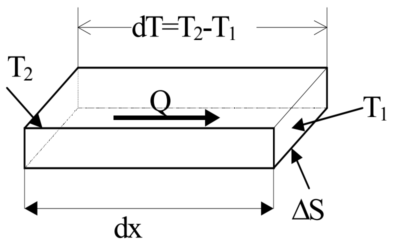

Рис. 13.5.

$$q = \frac{Q}{\Delta S \Delta t} \;; \qquad (13.18)$$

Як кінцевий результат, одержимо рівняння теплопровідності у наступному вигляді:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dt} ; \qquad (13.19)$$

Останній вираз - це математичний запис закону Фурьє: *питомий тепловий потік при теплопровідності прямо пропорційний градієнту температури*.

Тому, що в основу математичного опису теплопровідності покладено уявлення про молекулярно-кінетичну будову речовини, можливо отримати вираз для визначення коефіцієнта теплопровідності:

$$\lambda = {}^{1}/_{3}\, C_v\, \rho\, U\, \ell \;; \qquad (13.20)$$

де U - середньоквадратична швидкість руху молекул; ℓ - середня довжина їх вільного пробігу; C_V - питома теплоємкість газу при постійному об'ємі; ρ - густина газу.

Тепловий потік у системі СІ вимірюють у ватах, питомий тепловий потік [q] = [Вт/м^2], коефіцієнт теплопровідності [λ] = [Вт/К м].

2. Дифузія - це явище спонтанного проникнення та змішування часток контактуючих газів, рідини чи твердих тіл. Дифузія приводить до обміну масою між контактуючою речовиною і буде мати місце до тих пір поки є градієнт густини.

Маса речовини M, що переноситься у результаті дифузії, прямо пропорційна значенню площі ΔS через яку вона відбувається, часу Δt та градієнту густини. Тобто:

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S \Delta t ; \qquad (13.21)$$

де D - коефіцієнт дифузії, м^2/с; $^{d\rho}/_{dx}$ - градієнт густини, кг/м^4.

Коефіцієнт дифузії чисельно дорівнює масі речовини, що переноситься через одиницю площі за одиницю часу, при градієнті густини, що дорівнює одиниці.

Знак "-" у формулі (13.21) вказує на те, що перенос маси при дифузії здійснюється у напрямку спаду густини.

Визначимо масу речовини, що переноситься при дифузії через одиницю площі за одиницю часу таким чином: $m = M/\Delta S \Delta t$.

Тоді рівняння (13.21) можливо дати у наступному вигляді:

$$m = -D \frac{d\rho}{dx} \;; \qquad (13.22)$$

Це рівняння отримало назву закон Фіка: *маса речовини, що переноситься через одиницю площі за одиницю часу прямо пропорційний градієнту густини.*

Виходячи з того, що в основу математичного опису дифузії покладено уявлення про молекулярно-кінетичну будову речовини можливо отримати такий вираз для визначення коефіцієнта дифузії:

$$D = {}^{1}/_{3}\, U\, \ell \qquad (13.23)$$

де U - середньоквадратична швидкість руху молекул;

3. В'язкість виникає у газах чи рідинах при умові руху їхніх слоїв із різною швидкістю. Згідно з молекулярно-кінетичною теорією суть внутрішнього тертя полягає в переносі молекулами імпульсу в напрямку, протилежному градієнту швидкості потоку газу чи рідини.

Фізична картина появлення внутрішнього тертя полягає у тому, що із-за хаотичного теплового руху молекул відбувається їх взаємний обмін між прошарками газу чи рідини внаслідок чого загальний імпульс прошарку, що рухався скоріш зменшується, а того що рухався повільніше - зростає. Це приводить до гальмування прошарку, що рухався скоріше та прискорення прошарку, що рухався повільніше. За рахунок цього явища і виникає градієнт швидкості ΔV (див. рис. 13.6).

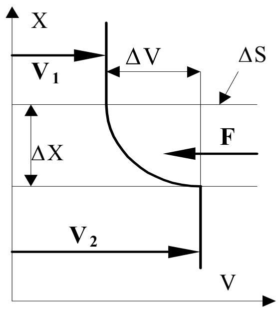

Рис. 13.6.

Сила в'язкості між прошарками газу чи рідини прямо пропорційна значенню площі поверхні ΔS та градієнту швидкості:

$$F = -\eta \frac{dV}{dx} \Delta S \ ; \qquad (13.24)$$

де η - коефіцієнт динамічної в'язкості, Па с;
$^{dV}/_{dx}$ - градієнт швидкості між потоками газу чи рідини, $с^{-1}$.

Знак "-" у формулі (13.24) вказує на те, що сила внутрішнього тертя направлена проти вектора швидкості потоку газу.

Коефіцієнт динамічної в'язкості дорівнює силі внутрішнього тертя, що діє на одиницю площі поверхні взаємодіючих шарів при градієнті швидкості, який дорівнює одиниці.

Відношення коефіцієнта динамічної в'язкості до густини газу чи рідини отримало назву коефіцієнт кінематичної в'язкості γ:

$$\gamma = {}^{\eta}/_{\rho}\ ;$$

Визначивши відношення сили внутрішнього тертя до площі

поверхні взаємодіючих прошарків газу чи рідини через параметр τ, рівняння (13.24) може бути представлено у наступному вигляді:

$$\tau = -\eta \frac{dV}{dt} \ ; \qquad (13.25)$$

Вище приведений вираз - це математична форма запису закону Ньютона для внутрішнього тертя газу чи рідини.

Тому, що в основу математичного опису в'язкості покладено уявлення про молекулярно-кінетичну будову речовини, можливо отримати вираз для визначення коефіцієнта динамічної в'язкості η:

$$\eta = {}^{1}/_{3}\, \rho\, U\, \ell \ ; \qquad (13.26)$$

де ρ - густина газу чи рідини.

З співставлення виразів (13.19), (13.22) та (13.25), які математично описують явища переносу, можливо зробити висновок про їх вражаючу збіжність. Це обумовлено єдністю фізичної картини, що лежить в основі явищ теплопровідності, дифузії та в'язкості, а саме змішування молекул у процесі їх хаотичного руху і зіткнень одна з одною.

В зв'язку з цим між коефіцієнтами теплопровідності, дифузії та в'язкості існують наступні співвідношення:

$$\eta = \rho D\ ; \qquad \lambda = \eta\, C_v\ ;$$

де C_V - питома теплоємкість газу при постійному об'ємі; ρ - густина газу; η - коефіцієнт динамічної в'язкості; D - коефіцієнт дифузії; λ - коефіцієнт теплопровідності.

13.6. Контрольні запитання.

1. Запишіть формулу і наведіть графік розподілу молекул ідеального газу за швидкостями теплового руху.
2. Запишіть і поясніть барометричну формулу.
3. Що називається ефективним радіусом молекули?
4. Що називається середньою довжиною вільного пробігу молекул?
5. Наведіть формули для визначення середньоарифметичної та середньоквадратичної швидкостей руху молекул.
6. У чому полягає фізична суть явища теплопровідності у газах?
7. Поясніть фізичну суть явища дифузії у газах?
8. У чому полягає фізична суть явища в'язкості у рідинах?

ГЛАВА 14.
ПЕРШЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ

14.1. Закон Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями свободи молекул.

Як ми вже відзначали у розділі "Класична механіка" під ступенями свободи будь-якої системи розуміють число незалежних координат, що визначають положення системи у просторі.

При поступальному русі газових молекул чи атомів вони мають можливість незалежно рухатись по трьох координатних напрямках в декартовій системі координат. Тому можна стверджувати, що одноатомні молекулі мають тільки три ступені свободи: $i_1 = i_{пост.} = 3$.

Двохатомна газова молекула крім 3-х незалежних координат поступального руху, має можливість обертатися навколо свого центра мас. Таким чином, загальна кількість ступенів свободи двохатомної молекули складається з 3-х ступенів її поступального руху та 2-х ступенів свободи її обертального руху: $i_2 = i_{пост.} + i_{оберт.} = 3+2 = 5$.

Трьохатомні та багатоатомні молекули, окрім поступального та обертального рухів, приймають участь і у коливальних процесах, які також чисельно визначаються відповідними ступенями свободи.

Закон Больцмана про рівномірній розподіл енергії за ступенями свободи молекул стверджує: *для системи, що знаходиться у термодинамічній рівновазі, на кожну поступальну чи обертальну ступень свободи приходиться у середньому однакова кінетична енергія, що дорівнює $^{1}/_{2}\ kT$; а на кожну коливальну ступень свободи - у середньому однакова кінетична енергія, що дорівнює kT.*

Таким чином середня кінетична енергія молекули дорівнює:

$$E = {}^{i}/_{2}\ kT; \qquad (14.1)$$

де i - сумарна кількість ступенів свободи молекули.

Параметр i може бути визначений з наступного рівняння:

$$i = i_{пост.} + i_{оберт.} + 2\ i_{колив.}; \qquad (14.2)$$

Коливальні ступені свободи мають вдвічі більшу енергію тому, що на них приходиться не тільки кінетична енергія (як у випадках поступального та обертального рухів), а й потенціальна енергія.

14.2. Внутрішня енергія ідеального газу.

Внутрішня енергія термодинамічної системи складається з суми внутрішніх енергій кожної з окремих молекул, що входять до складу системи та енергії взаємодії між ними. Тобто внутрішня енергія становить суму кінетичних та потенціальних енергій окремих молекул.

У випадку ідеальних газів потенціальними взаємодіями між молекулами та атомами нехтують, тому внутрішня енергія в цьому випадку - це сума середніх кінетичних енергій N молекул, що входять до складу конкретної системи:

$$U = \sum_{i=0}^{N} E_i\ ; \qquad (14.3)$$

де E_i - енергія окремої молекули.

Тоді внутрішня енергія деякої системи, що складається з N молекул ідеального газу, з урахуванням виразу (14.1), буде дорівнювати:

$$U_\mu = N\,E = {}^{i}/_{2}\ N\,k\,T\ ; \qquad (14.4)$$

Визначивши загальну кількість молекул N термодинамічної системи через сталу Авогадро та кількість молів ν цього газу $N = \nu N_A$, вираз (14.4) представимо у наступному вигляді:

$$U = \nu \frac{i}{2} N_A kT = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} RT\ ; \qquad (14.5)$$

де R - універсальна газова стала.

Тоді внутрішня енергія одного моля газу буде дорівнювати:

$$U_\mu = {}^{i}/_{2}\ RT\ ; \qquad (14.6)$$

З цієї формули видно, що внутрішня енергія ідеального газу визначається за допомогою тільки одного термодинамічного параметра - абсолютної температури і не залежить від об'єму та тиску газу.

Якщо температура газу у деякому термодинамічному процесі зміниться на ΔT, тоді і його внутрішня енергія зміниться на ΔU:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R\,\Delta T\ ; \qquad (14.7)$$

Ця зміна не залежить від характеру переходу системи з одного стану в інший, через що внутрішня енергія газу є функцією стану, а не функцією процесу, в якому він приймає участь.

14.3. Робота газу при зміні його об'єму.

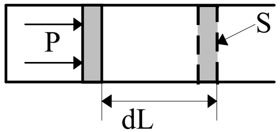

Рис. 14.1.

Розглянемо газ в деякій циліндричній посудині, який закритий щільно пригнаним поршнем, з площею поверхні S. Газ знаходиться в посудині під тиском P. При повільному нескінченно малому розширюванні газу, поршень пройде шлях dL, а об'єм газу збільшиться на $dV = S\,dL$ (див. рис. 14.1).

Розширюючись газ діє на поршень з силою $F = PS$ і виконує при цьому, проти зовнішніх сил, елементарну роботу dA:

$$dA = FdL = PSdL = PdV \;; \qquad (14.8)$$

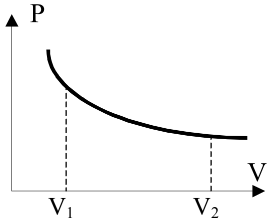

Рис. 14.2.

У випадку остаточної зміни об'єму газу від V_1 до V_2 виконується робота A, значення якої визначають інтегруванням виразу (14.8) в межах зміни цього об'єму. Тому:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} dA = \int_{V_1}^{V_2} PdV \;; \qquad (14.9)$$

На довільній P-V діаграмі (рис. 14.2), робота газу - це площа, що відокремлена віссю абсцис, кривою термодинамічного процесу, та прямими V_1 і V_2.

При розширюванні газу приріст об'єму dV буде додатним, відповідно і робота, що виконується при цьому, буде додатною. А при стискуванні газу приріст об'єму dV буде від'ємним, відповідно і робота, що виконується при цьому, буде від'ємною.

14.4. Перший закон термодинаміки.

Зміна внутрішньої енергії газу може відбуватися за рахунок двох різних процесів: або за рахунок виконання над ним механічної роботи; або за рахунок передачі йому деякої кількості теплоти.

Кількість теплоти Q - це енергія, що передається термодинамічній системі ззовні шляхом теплообміну.

Кількість теплоти - це енергія, тому і вимірюється вона в системі СІ у тих же одиницях, що й робота, тобто: [Q] = [A] = [Дж].

Кількість теплоти вважається додатною, якщо вона вводиться у термодинамічну систему і від'ємною, якщо вона виводиться з термодинамічної системи.

Нехай деяка термодинамічна система, що має внутрішню енергію U_1, отримала деяку кількість теплоти Q, і згодом перейшла у новий стан, що характеризується внутрішньою енергією U_2, виконавши при цьому роботу A проти зовнішніх сил. Тоді, згідно з законом збереження енергії, зміна внутрішньої енергії $\Delta U = U_1 - U_2$, буде дорівнювати різниці між кількістю теплоти Q, що отримала система, та роботою A, що виконала термодинамічна система проти зовнішніх сил. Тоді:

$$\Delta U = Q - A\;;$$

Або:

$$Q = \Delta U + A\;; \qquad (14.10)$$

Це рівняння являє собою математичний вираз першого начала термодинаміки: *кількість теплоти, що вводиться у термодинамічну систему, йде на збільшення її внутрішньої енергії та на виконання роботи проти зовнішніх сил.*

Диференціювання рівняння (14.10) дозволяє отримати перше начало термодинаміки у наступному вигляді:

$$dQ = dU + dA\;; \qquad (14.11)$$

Перше начало термодинаміки, за своєю фізичною суттю, це закон збереження енергії для термодинамічних систем.

14.5. Теплоємність газів. Рівняння Майєра.

Теплоємність речовини - це відношення кількості теплоти dQ, що поглинається нею у термодинамічному процесі, до зміни температури dT, що сталася за рахунок надання речовині цієї кількості теплоти:

$$C = \frac{dQ}{dT}\;; \qquad (14.12)$$

Відношення теплоємності C гомогенної речовини до її маси m називається питомою теплоємністю.

$$c_{пит} = \frac{C}{m} = \frac{dQ}{m\,dT}\;; \qquad (14.13)$$

де C, $c_{пит}$ - теплоємність і питома теплоємність речовини, відповідно.

<u>Молярною теплоємністю</u> C_μ називають кількість теплоти, яка потрібна для підвищення температури одного моля речовини на 1 К.

$$C_\mu = \frac{dQ}{\nu\, dT} \; ; \qquad (14.14)$$

де ν - кількість молів речовини.

Між питомою і молярною теплоємністю існує співвідношення:

$$C_\mu = \mu\, c_{пит} \; ; \qquad (14.15)$$

де μ - молярна маса речовини, моль/кг.

Для газів теплоємність являється функцією процесу, в якому приймає участь газ. Тому у термодинаміці відрізняють молярну теплоємність газу при постійному тиску C_P та при постійному об'ємі C_V.

Визначимо молярну теплоємність газу для випадку його участі в ізохорному процесі. Для одного моля газу ($\nu = 1$) перший закон термодинаміки має наступний вигляд:

$$dQ = dU_\mu + PdV_\mu \; ;$$

З урахуванням рівняння (14.14), вище приведене рівняння може бути перетворено до наступного вигляду:

$$C_\mu\, dT = dU_\mu + PdV_\mu \; ; \qquad (14.16)$$

Однак при ізохорному процесі $dV = 0$, тому $PdV = 0$. Тоді маємо:

$$C_V = \frac{dU_\mu}{dT} \; ; \qquad (14.17)$$

Враховуючи формулу (14.7), вище приведене рівняння може бути перетворено до наступного вигляду:

$$C_v = {}^{i}\!/_{2}\, R \; ; \qquad (14.18)$$

Далі визначимо молярну теплоємність газу для випадку його участі в ізобарному процесі. Для одного молz газу ($\nu = 1$) перший закон термодинаміки у цьому випадку буде мати наступний вигляд:

$$C_P\, dT = dU_\mu + PdV_\mu \; ;$$

Звідки:

$$C_P = \frac{dU_\mu}{dT} + \frac{PdV_\mu}{dT} \; ; \qquad (14.19)$$

Внутрішня енергія термодинамічної системи є функцією її стану і не залежить від процесу в якому газ бере участь, тому з урахуванням виразу (14.17), рівняння (14.19) запишімо у такому вигляді:

$$C_P = C_V + \frac{PdV_\mu}{dT} \; ; \qquad (14.20)$$

Використаємо рівняння Клапейрона-Менделєєва для одного моля газу, що приймає участь у ізобарному процесі ($P = const$). Тоді:

$$PdV_\mu = RdT \; ;$$

Звідки не важко здогадатися, що другий доданок у рівнянні (14.20) є не що інше, як універсальна газова стала R. А рівняння (14.20) можливо записати у наступному вигляді:

$$C_P = C_V + R \; ; \qquad (14.21)$$

Отриманий вираз має назву <u>рівняння Майєра</u>*: молярна теплоємність ідеального газу при постійному тиску перевищує його молярну теплоємність при постійному об'ємі на універсальну газову сталу.*

Врахувавши рівняння (14.18), з виразу (14.21), отримаємо:

$$C_V = \frac{i+2}{2} R \; ; \qquad (14.22)$$

Визначимо відношення C_P до C_V:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i} \; ; \qquad (14.23)$$

З цієї формули неважко встановити: для одноатомних газів $\gamma = 1{,}67$; а для двохатомних $\gamma = 1{,}4$.

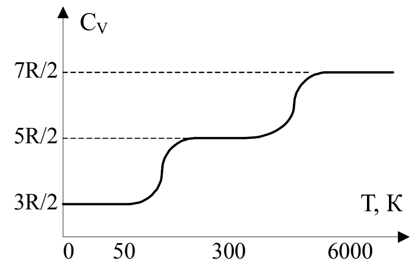

Рис. 14.3.

З формул (14.18) та (14.22) неважко зробити висновок, що молярні теплоємності ідеального газу не залежать від його температури, а визначаються тільки числом ступенів свободи у молекулах газу.

На рис. 14.3 приведена якісна крива залежності зміни молярної теплоємності водню з ростом його температури. Її можливо пояснити тим, що при низьких температурах молекули водню приймають участь тільки у поступальному русі ($i = 3$), при кімнатних - додається їх обертання ($i = 5$), а при високих - додається ще й коливання ($i = 7$).

В системі СІ теплоємність вимірюється у таких одиницях: $[C] = [Дж/К]$; $[c_{пит}] = [Дж/кг\ К]$; $[C_\mu] = [Дж/моль\ К]$.

14.6. Застосування першого начала термодинаміки до ізопроцесів.

1). Ізохорний процес. У випадку ізохорного процесу зміна об'єму у системі дорівнює нулю, за визначенням. Тобто dV = 0. Тоді і зовнішня робота у термодинамічній системі також буде рівна нулю, бо з (14.8) маємо:

$$dA = P \cdot dV = 0;$$

А перше начало термодинаміки у ізохорному процесі набуде виду:

$$dQ = dU; \qquad (14.24)$$

Значить при ізохорному процесі уся теплота, що доводиться до газу, використовується для збільшення його внутрішньої енергії.

З формули (14.17) маємо:

$$dU_{\mu} = C_V dT;$$

І для довільної маси газу:

$$dU = dQ = \frac{m}{\mu} C_V dT; \qquad (14.25)$$

2). Ізобарний процес. У випадку ізобарного процесу тиск у термодинамічній системі не змінюється за визначенням. Тобто P = const. Тоді перше начало термодинаміки буде мати вигляд (14.11). Обчислимо роботу газу при ізобарному процесі. З рівняння (14.9) маємо:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P(V_2 - V_1); \qquad (14.26)$$

А з рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$P(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1);$$

Тоді робота газу при ізобарному процесі буде дорівнювати:

$$A = \nu R(T_2 - T_1); \qquad (14.27)$$

Або у диференційній формі:

$$dA = \nu R dT; \qquad (14.28)$$

де $\nu = {}^{m}/_{\mu}$ - кількість речовини.

Рівняння (14.27) дозволяє визначити <u>фізичний зміст універсальної газової сталої R.</u> Нехай у ізобарному процесі приймає участь 1 моль газу (ν=1), а його температура зросла на один градус: $T_2 - T_1 = 1$ К.

Тоді робота газу, як це видно з рівняння (14.27), буде дорівнювати: A = R. Таким чином <u>універсальна газова стала чисельно дорівнює роботі ізобарного розширення одного моля газу при його нагріванні на один градус.</u>

Якщо у ізобарному процесі до маси m газу доводиться деяка кількість теплоти dQ:

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_P dT; \qquad (14.29)$$

То, згідно з рівнянням (14.17), внутрішня енергія газу збільшиться на таку величину:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT; \qquad (14.30)$$

3). Ізотермічний процес. У випадку ізотермічного процесу зміна температури у термодинамічній системі дорівнює нулю, за визначенням. Тобто dT = 0. Тоді і зміна її внутрішньої енергії також буде дорівнювати нулю, бо з (14.17) маємо:

$$dU = \nu C_V dT = 0;$$

Звідси можливо стверджувати, що перше начало термодинаміки в ізотермічному процесі має такий вигляд:

$$dQ = dA; \qquad (14.31)$$

Таким чином, при ізотермічному процесі уся теплота, що вводиться до термодинамічної системи, використовується для виконання зовнішньої роботи.

Обчислимо цю роботу. З рівняння (14.9) маємо:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV; \qquad (14.32)$$

А з рівняння Клапейрона-Менделєєва тиск газу дорівнює:

$$P = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{V};$$

Тоді робота при ізотермічному процесі буде дорівнювати:

$$A = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT(\ln V_2 - \ln V_1);$$

Або:

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\frac{V_2}{V_1}; \qquad A = \frac{m}{\mu} RT \ln\frac{P_1}{P_2}; \qquad (14.33)$$

4). Адіабатний процес. При адіабатному процесі відсутній теплообмін термодинамічної системи з навколишнім середовищем. Значить $dQ = 0$. Тоді згідно з першим началом термодинаміки, маємо:

$$0 = dU + dA ;$$

Або:

$$dA = - dU ; \qquad (14.34)$$

З останнього рівняння видно, що в адіабатному процесі газ виконує роботу проти зовнішніх сил виключно за рахунок зменшення своєї внутрішньої енергії. Обчислимо цю роботу.

З рівнянь (14.30) та (14.34) маємо:

$$dA = -\frac{m}{\mu} C_V dT ;$$

Інтегрування останнього виразу в межах зміни температури газу дає можливість одержати формулу для обчислювання роботи газу в адіабатному процесі:

$$A = \int_0^A dA = -\frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) ;$$

І в остаточному вигляді:

$$A = \nu C_V (T_1 - T_2) ; \qquad (14.35)$$

Таким чином, при адіабатному розширенні, максимальна зовнішня робота буде мати місце за умови максимуму початкової та мінімуму кінцевої температури газу.

14.7. Рівняння Пуассона.

Як ми вже відмічали при адіабатному процесі газ виконує роботу проти зовнішніх сил виключно за рахунок зменшення своєї внутрішньої енергії. Тобто: $dA = - dU$.

З іншого боку:

$$dA = P\, dV ; \qquad dU = {}^{m}/_{\mu}\, C_v\, dT ;$$

Тоді маємо:

$$PdV = -\nu C_V dT ; \qquad (14.36)$$

Надалі виконаємо диференціювання рівняння Клапейрона-Менделєєва, за умови, що $P \neq const$; $V \neq const$; $T \neq const$, і одержимо:

$$PdV + VdP = \nu R dT ; \qquad (14.37)$$

Поділимо рівняння (14.37) на рівняння (14.36) і отримаємо:

$$\frac{PdV + VdP}{PdV} = \frac{\nu RdT}{-\nu C_V dT} ;$$

Звідки, використовуючи рівняння Майєра (14.21), отримаємо:

$$1 + \frac{VdP}{PdV} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_P - C_V}{C_V} = -\frac{C_P}{C_V} + 1 ;$$

Згадавши рівняння (14.23) та позначивши відношення молярних теплоємкостей через γ, одержимо:

$$\frac{VdP}{PdV} = -\gamma ;$$

Зробивши розподіл змінних, вище приведене рівняння, перетворимо до наступного вигляду:

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} ;$$

Інтегруємо це співвідношення:

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = -\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} ;$$

І в результаті інтегрування маємо:

$$\ln P_2 - \ln P_1 = -\gamma(\ln V_2 - \ln V_1) = \gamma(\ln V_1 - \ln V_2) ;$$

Або:

$$\ln\frac{P_2}{P_1} = \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} ;$$

Звідки у підсумку маємо:

$$P_2 V^{\gamma}{}_2 = P_1 V^{\gamma}{}_1 ;$$

Завдяки тому, що стан 1 та 2 в адіабатному процесі нами вибрано довільно, маємо право стверджувати, що при адіабатному процесі для любого стану термодинамічної системи виконується співвідношення:

$$PV^{\gamma} = \text{const} \;; \qquad (14.38)$$

Це рівняння отримало назву рівняння Пуассона.

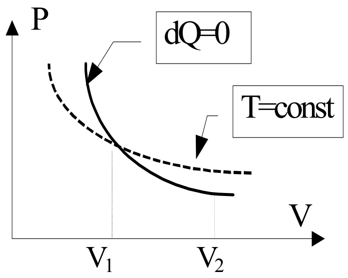

Рис. 14.4.

Виразивши тиск з рівняння Клапейрона-Менделєєва, підставимо його в (14.38), та отримаємо:

$$\frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} \cdot V^{\gamma} = \text{const} \;;$$

Або:

$$TV^{\gamma - 1} = \text{const} \;; \qquad (14.39)$$

Виразивши об'єм з рівняння Клапейрона-Менделєєва, підставимо його в (14.38), та отримаємо:

$$P \cdot \left(\frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{p} \right)^{\gamma} = \text{const} \;;$$

Або:

$$T^{\gamma} P^{1-\gamma} = \text{const} \;; \qquad (14.40)$$

Рівняння (14.39) та (14.40) також є рівняннями Пуассона для відповідних параметрів ідеального газу.

Показник адіабати завжди більше одиниці (для одноатомного газу γ =1,67), тому крива адіабати (PV^{γ} = const) завжди більш крута, ніж крива ізотерми (PV = const) при термодинамічних процесах в ідеальних газах (див. рис. 14.4).

Це пояснюється тим, що при адіабатному стискуванні, зростання тиску ідеального газу обумовлюється не тільки зменшенням його об'єму, як це відбувається при ізотермічному стискуванні, а й зростанням температури газу.

Термодинамічні процеси у ході яких молярна теплоємкість ідеального газу не змінюється отримали назву політропних.

Тобто, при політропному процесі ідеальний газ, окрім рівняння стану, підкоряється і додатковій умові: C_{μ} = const.

Усі політропні процеси описуються рівнянням такого виду:

$$PV^{n} = \text{const} \;; \qquad (14.41)$$

де n - безрозмірний параметр, який має назву показник політропи.

Показник політропи визначається таким чином:

$$n = \frac{C_{\mu} - C_P}{C_{\mu} - C_V} \;; \qquad (14.42)$$

де C_{μ} - молярна теплоємність ідеального газу; C_P , C_V - молярна теплоємність ідеального газу при постійному тиску та об'ємі.

Політропні процеси є самою загальною формою ізопроцесів, що відбуваються в ідеальних газах. Так, якщо n = 0, то ми маємо ізобарний процес (P = const), а при n = 1 - ізотермічний процес (PV = const). При n = γ, маємо адіабатний процес (PV^{γ} = const), а при n = ∞ - ізохорний процес.

14.8. Контрольні запитання.

1. В чому полягає фізичний зміст універсальної газової сталої?
2. Що таке теплоємність газу? Яка молярна теплоємність C_p чи C_v більша і чому?
3. Виведіть рівняння Майєра.
4. Виразіть внутрішню енергію газу через кількість ступенів свободи їх молекул.
5. Запишіть перше начало термодинаміки для ізобарного, ізотермічного, ізохорного та адіабатного процесів. Зробіть аналіз приведених формул.
6. Запишіть рівняння Пуассона для тиску і об'єму; тиску і температури; об'єму і температури.
7. Сформулюйте та запишіть аналітичний вираз для першого начала термодинаміки.
8. Яким чином визначається робота газу при зміні його об'єму?
9. Яким чином визначається робота газу при зміні його об'єму у ізотермічних процесах?

ГЛАВА 15.
ДРУГЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ

15.1. Кругові процеси. Оборотні та необоротні процеси.

Термодинамічна система знаходиться у рівноважному стані тоді, коли параметри, що її характеризують, мають значення, які залишаються без зміни як завгодно довго при відсутності зовнішнього впливу на систему. При порушенні цих умов система буде знаходитись в нерівноважному стані.

Ні один з реальних термодинамічних процесів не може бути дійсно рівноважним, та при повільному протіканні процесу він буде наближатися до рівноважного.

Круговим процесом (циклом) називається процес, при якому термодинамічна система пройшовши через ряд проміжних станів, повертається у початковий стан.

Любий круговий процес можливо розбити на окремі процеси розширення (1-2), та стискування (2-1) газу (див. рис. 15.1). При цьому робота розширення газу, за визначенням, є додатною ($dV > 0$), а робота стискування - від'ємною ($dV < 0$). Сумарна робота, яка виконується за один цикл, складається з роботи стискування газу та роботи по його розширенню і дорівнює площі фігури між лініями 1-2, зображені на рис. 15.1. Якщо ця сумарна робота, є додатною, то такий цикл називається прямим. А якщо ця сумарна робота, є від'ємною, то такий цикл називається зворотним (див. рис. 15.1). Прямий цикл використовується у теплових двигунах, а зворотний цикл - у холодильних машинах.

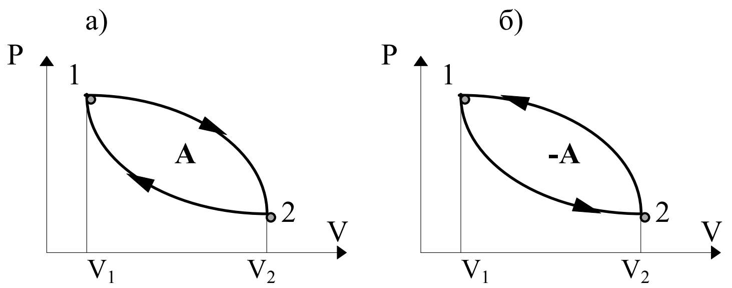

Рис. 15.1.

Внаслідок кругового процесу, термодинамічна система повертається у початковий стан, тому зміна її внутрішньої енергії дорівнює нулю, тобто $\Delta U = 0$. Тому перше начало термодинаміки для будь-якого кругового процесу набуває наступного вигляду:

$$Q = A\,; \qquad (15.1)$$

Тобто робота A, що виконується за один цикл дорівнює кількості теплоти Q, що отримана системою ззовні:

$$Q = Q_1 - Q_2\,; \qquad (15.2)$$

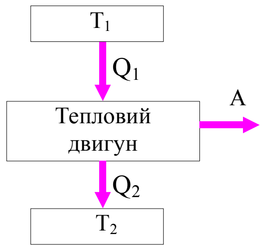

Рис. 15.2.

де Q_1 - кількості теплоти, що отримана системою ззовні; Q_2 - кількості теплоти, що віддана системою у зовнішнє середовище.

Коефіцієнт корисної дії (к.к.д) будь-якого кругового процесу можливо обчислити за наступною формулою:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}\;; \qquad (15.3)$$

Круговий процес називається оборотним, якщо він має можливість відбуватись, як у прямому, так і в зворотному напрямках. Любий круговий процес, який не відповідає вище приведеній умові називається необоротним.

При оборотних процесах повернення системи до початкового стану не приводить до яких-небудь змін у навколишньому середовищі. Всякий рівноважний процес є оборотним. А нерівноважний процес завжди є необоротним, бо при зворотному процесі система проходить через точки з іншими параметрами, ніж у прямому.

15.2. Другий закон термодинаміки.

Розглянемо принцип дії теплової машини (див. рис. 15.2). Тепловий двигун складається з таких основних частин: робочого тіла, нагрівника (температура T_1) і холодильника (температура T_2). Робоче тіло, наприклад газ, одержує від зовнішнього нагрівника теплоту в кількості Q_1, за рахунок чого змінює свої параметри. При цьому газ розширюється і виконує роботу проти зовнішніх сил. Після цього, для замикання циклу, параметри газу потрібно повернути до початкового стану.

Для виконання такого процесу треба зменшити внутрішню енергію газу до початкового рівня, що можливо тільки у випадку передачі газом холодильнику деякої кількості теплоти Q_2. У такому замкнутому циклі газом виконується робота:

$$A = Q_1 - Q_2 \; ; \qquad (15.4)$$

З формули (15.3) витікає, що тільки у випадку, коли $Q_2 = 0$, к.к.д. двигуна буде дорівнювати одиниці. Але ніяким другим чином неможливо робоче тіло повернути до початкового стану, як тільки віддаванням холодильнику деякої кількості теплоти Q_2. А це свідчить про те, що к.к.д. теплового двигуна завжди буде менше одиниці.

Таким чином ми дійшли до другого начала термодинаміки у формулюванні французького інженера Н.Карно (1796-1832): *неможливо створити такий циклічно діючий тепловий двигун, який мав би тільки одне джерело теплоти; такий двигун обов'язково повинен мати два джерела теплоти з різними температурами.*

За формулюванням Кельвіна-Планка друге начало термодинаміки звучить так: *неможливий термодинамічний процес, єдиним результатом якого є перетворення теплоти, отриманої від нагрівника, в еквівалентну їй роботу.*

В холодильній машині процес йде у зворотному напрямку по відношенню до процесу в тепловій машині (див. рис. 15.3).

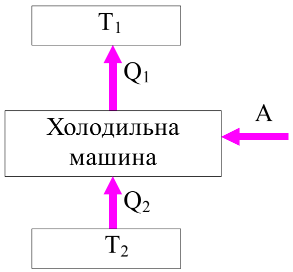

Рис. 15.3.

Нехай робочим тілом за цикл поглинається теплота Q_2, а віддається, при більш високій температурі, теплота Q_1.

Згідно з першим началом термодинаміки для кругового процесу: Q = A. Умовою роботи холодильної машини є:

$$Q = Q_2 - Q_1 < 0 \; ; \qquad (15.5)$$

Тому з (15.5) маємо:

$$Q_1 = Q_2 + A \; ; \qquad (15.6)$$

З цього рівняння зробимо висновок: кількість теплоти Q_1, що віддана джерелу теплоти з більш високою температурою T_1, перевищує кількість теплоти Q_2, що отримана робочим тілом від джерела теплоти з меншою температурою T_2, на величину роботи, яка виконується робочим тілом термодинамічної системи.

Тому Р.Клаузіус таким чином сформулював друге начало термодинаміки: *теплота ніколи не переходить сама собою від тіл з меншою температурою до тіл з більш високою температурою.*

15.3. Цикл Карно та його к.к.д. для ідеального газу.

Виходячи з другого закону термодинаміки Н.Карно сформулював теорему, яка тепер носить його ім'я.

Теорема Карно: *з усіх періодично діючих теплових машин максимальний к.к.д. мають оборотні машини, при цьому к.к.д. таких машин залежить тільки від температури нагрівника та холодильника і не залежить від виду робочого тіла, що використовується у процесі.*

Круговий процес, який складається з двох ізотерм та двох адіабат, що чергуються між собою, отримав назву цикл Карно (див. рис. 15.4).

Визначимо к.к.д. такого процесу. На етапі 1-2, газ ізотермічно (T_1 = const; ΔU = const) розширюється від стану 1 (P_1, V_1, T_1) до стану 2 (P_2, V_2, T_1), за рахунок отримання від нагрівника деякої кількості теплоти Q_1. Тоді, згідно з виразом (14.33), маємо:

$$A_{1,2} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1 \; ; \qquad (15.7)$$

На етапі 3-4, робота ізотермічного стискування газу від стану 3 (P_3, V_3, T_2) до стану 4 (P_4, V_4, T_2) дорівнює кількості теплоти Q_2, що відведена з системи. Тоді, згідно з виразом (14.33), маємо:

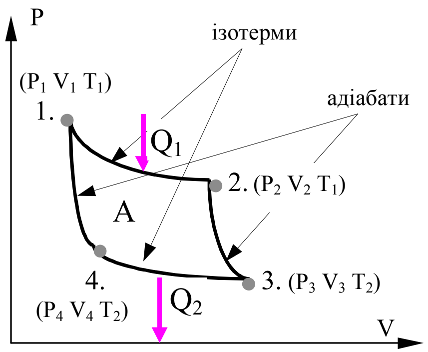

Рис. 15.4.

$$A_{3,4} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2 \; ; \qquad (15.8)$$

На етапі 2-3 газ розширюється, але вже за адіабатним законом (Q =0) від стану 2 (P_2, V_2, T_1) до стану 3 (P_3, V_3,T_2). При цьому газ виконує роботу проти зовнішніх сил за рахунок зменшення своєї внутрішньої енергії. Тоді, згідно з виразом (14.35), маємо :

$$A_{2,3} = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) \; ; \qquad (15.9)$$

На останньому 4-1 етапі, для замикання циклу, газ за адіабатним законом (Q =0) стискують до параметрів початкового стану, виконуючи при цьому таку роботу:

$$A_{4,1}=\frac{m}{\mu}C_V(T_2-T_1)=-\frac{m}{\mu}C_V(T_1-T_2)=-A_{2,3}\ ; \qquad (15.10)$$

А повна робота за цикл, з урахуванням виразів (15.7 – 15.10), буде дорівнювати:

$$A=A_{1,2}+A_{2,3}+A_{3,4}+A_{4,1}=A_{1,2}+A_{3,4}=Q_1-Q_2\ ;$$

Тоді, к.к.д. циклу Карно буде дорівнювати:

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2\ln\frac{V_3}{V_4}}{T_1\ln\frac{V_2}{V_1}}\ ; \qquad (15.11)$$

Згідно з рівнянням Пуассона, для обох адіабат циклу маємо:

$$T_1V_2^{\gamma-1}=T_2V_3^{\gamma-1}\ ;$$
$$T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_4^{\gamma-1}\ ;$$

Поділивши ці рівняння, отримаємо:

$$\frac{T_1V_2^{\gamma-1}}{T_1V_1^{\gamma-1}}=\frac{T_2V_3^{\gamma-1}}{T_2V_4^{\gamma-1}} \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}=\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1}=\frac{V_3}{V_4}\ ;$$

Враховуючі це співвідношення, з рівняння (15.11), отримаємо остаточний вираз для визначення к.к.д. циклу Карно:

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}\ ; \qquad (15.12)$$

Таким чином, максимальне значення к.к.д. теплових машин, що працюють за циклом Карно, залежить тільки від температури нагрівника та холодильника і не залежить від їх конструкції та виду робочого тіла, що використовується у термодинамічному процесі.

15.4. Поняття про ентропію ідеального газу.

З рівнянь (15.12) та (15.3) для циклу Карно можливо записати:

$$1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1}\ ;$$

Звідки, враховуючи від'ємний знак параметра Q_2, маємо:

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0\ ; \qquad (15.13)$$

Відношення кількості теплоти, що одержане системою від джерела до температури джерела, отримало назву зведеної теплоти.

Тоді, з рівняння (15.13), можливо зробить наступний висновок: якщо термодинамічна система приймає участь у круговому процесі за циклом Карно, то сума зведених кількостей теплоти, одержаних системою за цикл, дорівнює нулю. У цьому полягає суть так званої теореми Клаузіуса. Строге теоретичне узагальнення теореми Клаузіуса дозволило довести, що для любого оборотного кругового процесу, сума зведених кількостей теплоти дорівнює нулю. Тобто:

$$\oint\frac{dQ}{T}=0\ ; \qquad (15.14)$$

З рівності нулю цього інтеграла слідує, що підінтегральний вираз дорівнює повному диференціалу деякої функції, яка визначається тільки станом термодинамічної системи і не залежить від способу переходу до цього стану. Тобто:

$$dS=\frac{dQ}{T}\ ; \qquad (15.15)$$

Функція стану термодинамічної системи S, диференціал якої дорівнює зведеній кількості теплоти, отримала назву ентропії.

Визначимо зміну ентропії при переході термодинамічної системи з стану 1 до стану 2, який може відбуватися будь-яким шляхом. Для цього інтегруємо вираз (15.15) у відповідних межах та отримаємо:

$$\int_{S_1}^{S_2}dS=S_2-S_1=\Delta S=\int_1^2\frac{dQ}{T}\ ; \qquad (15.16)$$

Тобто ентропія може визначатися тільки, як різниця між станами термодинамічної системи. Для єдиного стану термодинамічної системи поняття ентропії не має сенсу.

З формули (15.14) виходить, що для оборотного процесу в замкнутій системі зміна ентропії дорівнює нулю, тобто $\Delta S = 0$. А ентропія замкнутої системи, яка здійснює необоротний цикл, зростає: $\Delta S >$ 0. Тобто ентропія замкнутої системи не зменшується:

$$\Delta S \ge 0 \;; \qquad (15.17)$$

Це співвідношення отримало назву нерівність Клаузіуса.

У випадку коли система є незамкнутою, ентропія може змінюватися будь-яким чином.

Продовжимо обчислення зміни ентропії при переході термодинамічної системи з стану 1 до стану 2. Для цього використаємо перше начало термодинаміки і тоді з рівняння (15.16) отримаємо:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T} = \int_1^2 \frac{dU}{T} + \int_1^2 \frac{dA}{T} \;; \qquad (15.18)$$

У загальному випадку робота dA газу обчислюється з виразу (14.8), а з урахуванням Клапейрона-Менделєєва, маємо:

$$dA = \frac{m}{\mu} R T \frac{dV}{V} \;; \qquad (15.19)$$

Тоді, враховуючи вираз (14.25) для визначення зміни внутрішньої енергії газу, рівняння (15.19) перетворимо до виду:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{T\,dV}{T\,V} \;;$$

А після інтегрування отримаємо:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} \;; \qquad (15.20)$$

Таким чином, зміна ентропії при переході ідеального газу з одного стану у другий, не залежить від виду термодинамічного процесу.

Як відомо, при адіабатному процесі $dQ = 0$, тоді з (15.16) маємо $\Delta S = 0$. Тобто при адіабатному процесі зміна ентропії завжди дорівнює нулю, тому цей процес іноді називають ізоентропійним процесом.

Термодинамічна імовірність W визначає кількість мікростанів системи за допомогою яких може бути здійснений її макростан. За визначенням $W \ge 1$. Зв'язок між ентропією системи та термодинамічною імовірністю встановлюється за допомогою формули Больцмана:

$$S = k \ln W \;; \qquad (15.21)$$

де k - стала Больцмана.

Формула Больцмана дозволяє визначити фізичний зміст ентропії: ентропія це міра невпорядкованості термодинамічної системи.

Тоді друге начало термодинаміки можливо дати у такому тлумаченні: *при необоротних процесах, що відбуваються у замкнутих системах, термодинамічна імовірність їх стану зростає, а при оборотних - залишається незмінною*.

15.5. Зв'язана та вільна енергія ідеального газу.

Перетворимо рівняння (15.15) до такого вигляду:

$$dQ = T\,dS \;; \qquad (15.22)$$

Використавши перше начало термодинаміки виду (14.11), з вище приведеного рівняння отримаємо:

$$dU + dA = T\,dS \;;$$

Або:

$$dA = -\,dU + T\,dS = -\,(dU - T\,dS) \;; \qquad (15.23)$$

Визначимо параметри, які входять у це співвідношення таким чином: $dU - T\,dS = dF$ - вільна енергія; dU - внутрішня енергія; $T\,dS$ - зв'язана енергія. Тоді маємо:

$$dA = -\,dF \;; \qquad (15.24)$$

Таким чином, зовнішня робота виконується термодинамічною системою за рахунок зменшення її вільної енергії. Якщо $dF = 0$, тоді термодинамічна система не в змозі виконувати зовнішню роботу.

Зв'язана енергія, це та частина внутрішньої енергії, яка ні при яких умовах не може бути перетворена у зовнішню роботу.

Враховуючи, що ентропія у замкнутих термодинамічних системах завжди зростає, тоді і зв'язана енергія, як це видно з (15.22) буде зростати, а значить завжди наступить такий момент, коли система має вичерпати вільну енергію і втратить змогу виконувати зовнішню роботу.

15.6. Контрольні запитання.

1. Дайте визначення кругових процесів.
2. Дайте формулювання другого начала термодинаміки.
3. В чому полягає фізичний зміст ентропії?
4. Який процес отримав назву цикл Карно? Наведіть формулу для визначення його к.к.д.
5. Запишіть нерівність Клаузіуса. Дайте її тлумачення.
6. Що таке зв'язана та вільна енергія ідеального газу?

ГЛАВА 16.

РЕАЛЬНІ ГАЗИ

16.1. Сили та потенціальна енергія міжмолекулярної взаємодії в реальних газах.

Експериментально було встановлено, що сили міжмолекулярної взаємодії проявляються на відстанях не більших 10^{-9} м і швидко зменшуються зі збільшенням відстані між молекулами.

На початку XX сторіччя завдяки стрімкому розвитку квантової механіки було встановлено, що між молекулами речовини одночасно діють сили притягання і відштовхування. На близьких відстанях між молекулами діють в основному сили відштовхування, а на великих - притягання. Сили відштовхування вважаються додатними, а сили притягання - від′ємними.

На рис. 16.1-а наведена якісна залежність сил молекулярної взаємодії від відстані між молекулами r, де F_o и F_n - сили відштовхування та притягання, а F - результат їх сумісної дії.

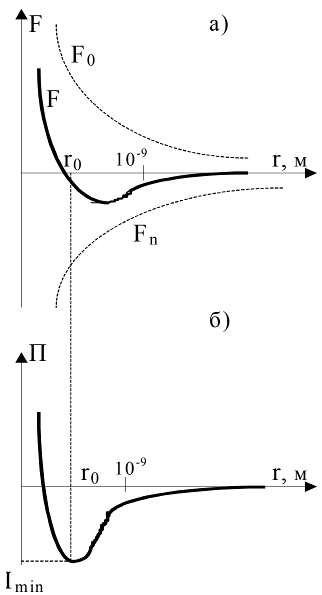

Рис. 16.1.

На відстані $r = r_0$, сили притягання та відштовхування урівноважують одна одну, тобто F = 0. При $r < r_0$ переважають сили відштовхування (F > 0), а при $r < r_0$ - сили притягання (F < 0). На відстанях $r > 10^{-9}$ м., міжмолекулярні сили взаємодії практично відсутні ($F \to 0$). Сила взаємодії F між молекулами газу обумовлює існування потенціальної енергії їх взаємодії П. Графічна залежність потенціальної енергії від відстані між молекулами дана на рис. 16.1-б.

Припустимо відстань між двома газовими молекулами зростає. При цьому буде виконуватись, за рахунок зменшення потенціальної енергії молекул, деяка робота:

$$dA = F\,dr = -\,d\Pi\,; \qquad (16.1)$$

Інтегруємо цей вираз у межах від r до ∞, та отримаємо:

$$\int_r^\infty d\Pi = -\int_r^\infty F dr\;; \qquad (16.2)$$

Враховуючи, що при r = ∞ молекули між собою не взаємодіють, а значить $\Pi_\infty = 0$, з вище приведеного рівняння одержимо:

$$\Pi_r = \int_r^\infty F dr\;; \qquad (16.3)$$

Отримані вирази (16.2) та (16.3) встановлюють зв’язок між силою взаємодії та потенціальною енергією двох молекул, які знаходяться на відстані r. При $r = r_0$ сила F = 0, тоді з виразу (16.1) маємо:

$$\left(\frac{d\Pi}{dr}\right)_{r=r_0} = -F = 0\,; \qquad (16.4)$$

А це означає, що система з двох молекул, у стані рівноваги, характеризується постійним мінімальним значенням потенціальної енергії взаємодії Π_{min}.

Потенціальна енергія взаємодії Π_{min}, чисельно визначає роботу, проти сил міжмолекулярної взаємодії, необхідну для того, щоб роз'єднати молекули, які знаходяться у положенні рівноваги. Параметр kT визначає середню кінетичну енергію хаотичного теплового руху молекул. Тому співвідношення між параметрами Π_{min} та kT визначає у якому агрегатному стані буде знаходитись речовина. Якщо $\Pi_{min} \ll kT$, то речовина знаходиться у газоподібному стані, якщо $\Pi_{min} \approx kT$, то речовина є рідиною, а якщо $\Pi_{min} \gg kT$, то речовина знаходиться у твердому стані. Тобто речовина в залежності від температури може змінювати свій агрегатний стан, а температура переходу з одного агрегатного стану в інший залежить від значення Π_{min}. Так у інертних газів Π_{min} не значна, а у металів - дуже велика, тому при кімнатних температурах вони знаходяться відповідно в газоподібному і твердому станах.

16.2. Рівняння Ван-дер-Вальса.

Модель ідеального газу, що використовувалась нами при визначені основних законів молекулярно-кінетичної теорії, може бути застосована з достатньою точністю для опису газів, якщо вони знаходяться при досить високих температурах та низькому тиску.

У випадку великого тиску і низьких температур для газів треба мати інше рівняння стану, яке враховувало б розміри молекул та сили взаємодії між ними. Вперше таке врахування зробив видатний голландський фізик І.Ван-дер-Ваальс (1837-1923).

1. Урахування власного об'єму молекул. Частину об'єму любої посудини займають самі молекули. Так при тиску у 5000 атмосфер, об'єм молекул самого газу займає не менше 50 % об'єму посудини. Тому вільний об'єм, в якому можуть рухатись молекули реального газу, треба зменшити на деяку величину b, яка обчислюється так:

$$b \approx 4V_0 \; ; \qquad (16.5)$$

де V_0 - сумарний власний об'єм молекул реального газу.

Тоді маємо:

$$V = V_\mu - b \; ; \qquad (16.6)$$

де V_μ - об'єм одного молю реального газу.

2. Урахування притягання молекул. Дія сил міжмолекулярної взаємодії приводить до появи у реальних газах додаткового тиску, який отримав назву внутрішній тиск. Для одного моля реального газу, цей додатковий тиск може бути обчислений таким чином:

$$P' = \frac{a}{V_\mu^2} \; ; \qquad (16.7)$$

де a - стала Ван-Дер-Ваальса, яка визначається дослідним шляхом.

З урахуванням співвідношень (16.6) та (16.7), рівняння стану для одного моля реальних газів, матиме вигляд:

$$\left(P + \frac{a}{V_\mu^2}\right)\cdot\left(V_\mu - b\right) = RT \; ; \qquad (16.8)$$

Якщо розглядати довільну кількість газу масою m, то вище приведене рівняння прийме такий вигляд:

$$\left(P + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\cdot\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT \; ; \qquad (16.9)$$

Вирази (16.8) і (16.9) отримали назву рівняння Ван-дер-Ваальса для реального газу.

16.3. Ізотерми Ван-дер-Ваальса. Критичні параметри.

Теоретичні ізотерми Ван-дер-Ваальса можливо побудувати, якщо при фіксованій температурі надавати довільних значень об'єму газу і обчислювати з рівняння (16.9) його тиск. На рис. 16.2 приведені ізотерми Ван-дер-Ваальса, які мають дуже характерний хвильовий вигляд і обчислені при різних температурах реального газу, причому $T_4 > T_3 > T_2 > T_1$. Проаналізуємо ці криві більш детально.

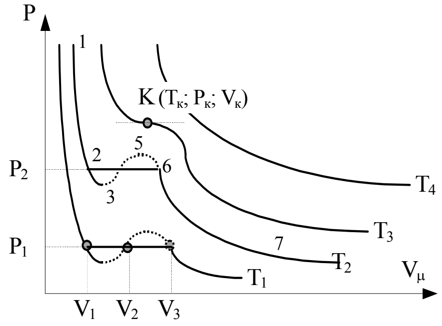

Рис. 16.2.

На дільниці 1-2 речовина знаходиться у рідкому стані, а на дільниці 6-7 - у газоподібному. У точці 2 починається процес кипіння рідини. На дільницях 1-3 та 5-7, при зменшенні об'єму газу тиск зростає, що цілком природно. На дільниці 3-5 при зменшенні об'єму газу, тиск теж зменшується, що суперечить здоровому глузду і при експериментах не спостерігається.

На дільниці 2-6 фактична ізотерма реального газу має вигляд горизонтальної лінії, що паралельна осі V_μ . На цій дільниці спостерігається суміш рідини і пари, де вони знаходяться у стані рівноваги. З підвищенням температури дільниця переходу газу в рідину 2-6 зменшується і при певній температурі обов'язково з'явиться ізотерма (T_3), де знаходиться точка К, яка отримала назву критичної. Критична точка характеризується критичними параметрами, а саме: критичною температурою (T_K), критичним тиском (P_K) та критичним об'ємом (V_K). При цих параметрах рідина практично миттєво перетворюється у пару. З подальшим зростанням температури, ізотерми Ван-дер-Ваальса реального газу перетворюються на ізотерми ідеального газу. Таким чином, стан реальної речовини можливо умовно поділити на три частини: у лівій маємо рідину; по центру - суміш рідини та пари; справа - пара і газ (рис. 16.3). З фізичної точки зору між парою та газом немає ніякої різниці. Однак з практичної точки зору кажуть, що газ це пара при температурі вище критичної.

16.4. Внутрішня енергія реального газу.

Внутрішня енергія ідеального газу складається лише з кінетичної енергії руху його молекул. Тому вона не залежить ні від об'єму газу, ні від тиску, а визначається лише його температурою:

$$U_\mu = C_V T\ ; \qquad (16.10)$$

де C_v - молярна теплоємність газу при постійному об'ємі.

Для реального газу внутрішня енергія складається з кінетичної енергії руху молекул (як і для ідеального газу) та потенціальної енергії міжмолекулярної взаємодії. Знайдемо значення цієї потенціальної енергії. Робота, яка виконується проти додаткового молекулярного тиску (16.7), іде на збільшення потенціальної енергії системи, тобто:

$$dA = P' dV_\mu = d\Pi = \frac{a}{V_\mu^2} dV_\mu\ ;$$

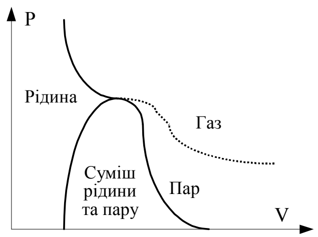

Рис. 16.3.

Інтегруємо цей вираз у межах від 0 до V_μ:

$$\Pi = \int_0^{V_\mu} \frac{a}{V_\mu^2} dV_\mu = -\frac{a}{V_\mu}\ ; \qquad (16.11)$$

Врахувавши вираз (16.10), внутрішня енергія одного моля реального газу буде дорівнювати:

$$U_\mu = C_V T - \frac{a}{V_\mu}\ ; \qquad (16.12)$$

Тобто, внутрішня енергія реального газу збільшується не тільки з підвищенням його температури, а й при зростанні об'єму газу.

Розглянемо процес розширювання газу без теплообміну з оточуючим середовищем ($dQ = 0$), при якому не виконується зовнішня робота ($dA = 0$). З першого начала термодинаміки маємо:

$$dQ = (U_2 - U_1) + dA\ ;$$

Звідки:

$$U_2 - U_1 = 0\ ; \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_1\ ; \qquad (16.13)$$

Тому, як це видно з формули (16.10), для ідеального газу, маємо:

$$C_V T_2 = C_V T_1 \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1\ ;$$

А це значить, що при адіабатному розширюванні ідеального газу його температура не змінюється.

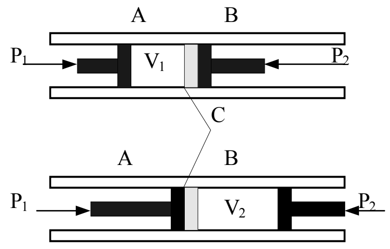

Рис. 16.4.

На відміну від ідеального, для реального газу з формул (16.12) та (16.13) маємо:

$$C_V T_1 - \frac{a}{V_1} = C_V T_2 - \frac{a}{V_2}\ ;$$

Звідки:

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)\ ; \qquad (16.14)$$

Значить, зміна об'єму реального газу викликає зміну його температури. При цьому, при адіабатному розширюванні газ охолоджується, а при стискуванні - нагрівається.

16.5. Ефект Джоуля-Томсона. Зрідження газів.

Адіабатне розширювання реального газу, за умови виконання ним зовнішньої роботи, отримало назву ефект Джоуля-Томсона.

Розглянемо посудину в якій міститься пробка С, дві ємності А і В, та два поршня (рис. 16.4). В ємності А газ знаходиться під тиском P_1, а у ємності В під тиском P_2, причому $P_1 > P_2$. Внаслідок різниці тисків газ повільно переходить через пробку від ємності А до В, розширюючись за законом адіабати. Цей процес отримав назву дроселювання. Якщо газ при дроселюванні нагрівається, то ефект Джоуля-Томсона називається від'ємним, а якщо охолоджується - додатним.

З першого начала термодинаміки маємо:

$$(U_2 - U_1) + \Delta A = 0\ ; \qquad (16.15)$$

Зовнішня робота газу складається з додатної роботи лівого поршня ($A_2 = P_2 V_2$) та від'ємної роботи правого поршня ($A_1 = P_1 V_1$) і дорівнює $\Delta A = A_2 - A_1$. З формули (16.15) отримаємо:

$$(U_2 - U_1) + A_2 - A_1 = 0\ ; \quad \Rightarrow \quad U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2\ ;$$

Тобто, при адіабатному дроселюванні газу маємо:

$$U + PV = \text{const}\ ; \qquad (16.16)$$

Параметр U+PV отримав назву ентальпія, а адіабатні процеси іноді іменують ізоентальпійними.

Знак ефекту Джоуля-Томсона залежить від того, яка поправка Ван-дер-Ваальса (*а* чи *в*) відіграє основну роль.

Реальний газ дає додатний ефект Джоуля-Томсона, якщо для нього основну роль відіграють сили притягання між молекулами і від'ємний ефект, якщо для нього основну роль відіграє власний об'єм молекул. Для одного і того ж газу, в залежності від його температури і тиску, може відігравати основну роль як поправка *а* так і поправка *в*. Тому один і той же газ в залежності від зовнішніх умов дає то додатний, то від'ємний ефект Джоуля-Томсона.

При деяких значеннях тиску і температури роль обох поправок *а* та *в* однакова. В такому стані реальний газ дає нульовий ефект Джоуля-Томсона, тобто він не нагрівається і не охолоджується при дроселюванні. Стан в якому ефект Джоуля-Томсона рівний нулю, називається точкою <u>інверсії.</u> Сукупність точок інверсії утворює <u>криву інверсії</u>, зображену на рис. 16.5.

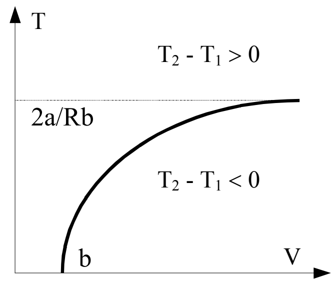

Рис. 16.5.

Ефект Джоуля-Томсона використовується на практиці для зрідження газів. Рідкий гелій вперше був отриманий у 1908 році, при температурі 5,4 К. Пізніше були одержані температури 0,71 К та 0,4 К, але чим ближче до абсолютного нуля, тим важче одержати подальше охолодження. Тепер усі гази одержані не лише в рідкому, а і в твердому стані.

16.6. Контрольні запитання.

1. Чим відрізняються реальні гази від моделі ідеального газу?
2. Запишіть рівняння Ван-дер-Ваальса і дайте його тлумачення.
3. Які сталі Ван-дер-Ваальса Ви знаєте і у чому полягає їх фізичний зміст?
4. Від яких параметрів залежить внутрішня енергія реального газу і як вона визначається?
5. Який процес отримав назву ефект Джоуля-Томсона. Чим він зумовлений?
6. Поясніть фізичний зміст критичних параметрів.
7. Накресліть та поясніть ізотерми Ван-дер-Ваальса.

ГЛАВА 17.

РІДИНА ТА ТВЕРДЕ ТІЛО

17.1. Властивості рідини. Поверхневий натяг.

Рентгеноструктурний аналіз рідин показав, що характер розташування їхніх молекул займає проміжок між газом і твердим тілом. Рідина має об'єм, але не має форми і приймає форму посудини, в якій вона знаходиться. Рух молекул рідини - упорядковано-хаотичний. Кожна молекула деякий час коливається навколо положення рівноваги, після чого стрибком переходить у нове положення, яке відстоїть від старого на відстані сумірній з розмірами молекул.

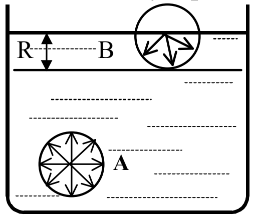

Рис. 17.1.

На кожну молекулу рідини з боку оточуючих молекул діють сили притягання, які швидко зменшуються з зростанням відстані між ними. Тому починаючи з відстані R ≈ 10^{-9} м, силами притягання між молекулами нехтують. Ця відстань називається <u>радіусом молекулярної дії</u>, а сфера радіусом R - <u>сферою молекулярної дії.</u>

Прошарок рідини, який знаходиться біля її вільної поверхні і товщина якого дорівнює радіусу молекулярної дії R, називається поверхневим шаром рідини (див. рис. 17.1). Виділимо всередині рідини молекулу *А* і проведемо навколо неї сферу радіусом R. З молекулою *А* будуть взаємодіяти лише ті молекули рідини, які знаходяться всередині сфери. Сили, з якими ці молекули діють на молекулу *А* напрямлені в різні сторони, тому результуюча сила, яка діє на молекулу всередині рідини, дорівнює нулю.

Але якщо молекула знаходиться у поверхневому шарі рідини то, з простору над рідиною на молекулу *В* ніякі сили не діють. Тому рівнодійна сил взаємодії цієї молекули з іншими не дорівнює нулю і напрямлена всередину рідини. Тобто результуючі сили, що діють на кожну молекулу поверхневого шару, чинять на рідину тиск, який називається <u>молекулярним (внутрішнім) тиском.</u> Внутрішній тиск не діє на тіла занурені у рідину, бо він обумовлений взаємодією тільки між молекулами самої рідини. Але сама рідина дуже стиснута внутрішнім тиском і тому вона вважається практично не стисливою.

Для переміщення молекули з глибини рідини в поверхневий шар потрібно виконати роботу проти сил внутрішнього тиску, тому молекули в поверхневому шарі мають більшу потенціальну енергію ніж молекули всередині рідини. Ця додаткова енергія, яку мають молекули в поверхневому шарі рідини, отримала назву поверхневої і визначається таким чином:

$$\Delta E = \sigma \cdot \Delta S \; ; \qquad (17.1)$$

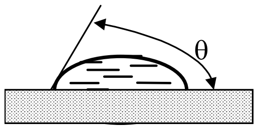

Рис. 17.2.

де σ - поверхневий натяг; ΔS – площа поверхневого шару, м^2.

Поверхневий натяг дорівнює силі поверхневого натягу, що діє на одиницю довжини контуру, який обмежує поверхню рідини: $\sigma = F$.

Для більшості рідин поверхневий натяг дорівнює σ=10^{-2} –10^{-1} Н/м.

Поверхневий натяг рідин суттєво знижується з ростом їх температури і при критичній температурі (для води t_K =374^{o}C) для будь-якої рідини поверхневий натяг дорівнює нулю. Поверхневий натяг рідини суттєво залежить від наявності домішок в ній. Речовина, яка будучи домішана до рідини зменшує її поверхневий натяг, називається поверхнево-активною речовиною. Для води поверхнево-активною речовиною є мило, воно зменшує поверхневий натяг води майже вдвічі. Поверхнево-активні речовини, які домішуються до води, застосовуються при збагаченні різних руд методом флотації.

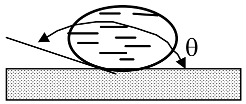

Рис. 17.3.

З практики відомо, що рідина по-різному взаємодіє з твердим тілом. Якщо капля рідини розтікається по поверхні твердого тіла, то кажуть, що ця рідина змочує тверде тіло (див. рис. 17.2). Змочування рідиною поверхні твердого тіла буде в тому випадку, коли сили притягання між молекулами рідини і твердого тіла більші, ніж сили взаємодії між молекулами самої рідини.

Якщо розтікання каплі води не має місця то кажуть, що рідина не змочує тверде тіло. У цьому випадку сили притягання між молекулами рідини більші, ніж сили взаємодії між молекулами рідини та твердого тіла. Чисельною характеристикою змочування рідиною твердого тіла є крайовий кут змочування θ. (див. рис. 17.2 та 17.3).

Крайовий кут - це кут, всередині якого знаходиться рідина, одна

сторона співпадає з дотичною до поверхні рідини, а інша співпадає з поверхнею твердого тіла. Крайовий кут реальних речовин змінюється у межах: $0 < \theta < \pi$. У випадку $\theta = 0$ маємо повне змочування, а при $\theta = \pi$ маємо повне незмочування.

У системі СІ поверхневий натяг вимірюється у таких одиницях: $[\sigma]$ = [Н/м] = [Дж/м^2].

17.2. Формула Лапласа. Капілярні явища.

Якщо поверхня рідини викривлена, то вона здійснює додатковий тиск на рідину за рахунок сил поверхневого натягу. Цей тиск для випуклої поверхні є додатним і направлений у бік самої рідини, а у випадку вгнутої поверхні – від'ємним і направлений у зворотному напрямку. Знайдемо цей додатковий тиск.

Нехай рідина має форму кулі радіусом R (див. рис. 17.4). Під дією додаткового тиску P об'єм кулі буде зменшуватись, тобто буде виконана робота, яка згідно з (14.8), дорівнює:

$$dA = PdV \; ; \qquad (17.2)$$

Згадавши формулу для об'єму кулі, маємо:

$$dA = P\, d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = P\, 4\pi R^2\, dR \; ; \qquad (17.3)$$

Але зміна площі поверхні кулі на dS викличе зміну її поверхневої енергії, яка згідно з виразом (17.1), дорівнює:

$$dE = \sigma\, dS = \sigma\, d\left(4\pi R^2\right) = \sigma\; 8\pi R\, dR \; ; \qquad (17.4)$$

Зменшення поверхневої енергії дорівнює виконаній роботі, тому прирівнявши праві частини рівнянь 17.3 та 17.4, отримаємо:

$$P\, 4\pi R^2 dR = \sigma\, 8\pi R\, dR$$

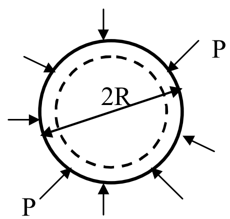

Рис. 17.4.

Звідки маємо:

$$P = \frac{2\sigma}{R} \; ; \qquad (17.5)$$

У випадку вгнутої поверхні рідини додатковий тиск P направлений у протилежний від рідини бік і дорівнює:

$$P = -\frac{2\sigma}{R}\ ; \qquad (17.6)$$

У випадку коли поверхня рідини має довільну форму, додатковий тиск знаходиться за так званою формулою Лапласа:

$$P = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\ ; \qquad (17.7)$$

де r_1 і r_2 - радіуси кривизни двох довільних взаємно перпендикулярних перетинів поверхні рідини.

Радіус кривизни вважається додатним якщо центр кривизни відповідного перетину знаходиться всередині рідини і від'ємним якщо центр кривизни відповідного перетину знаходиться поза рідиною.

Для кулі ($r_1 = r_2$) формула Лапласа перетворюється у формулу (17.5). У разі плоскої поверхні ($r_1 = r_2 = \infty$) сили поверхневого натягу додаткового тиску не створюють ($P = 0$).

Якщо у рідину, що налита у широку посудину, помістити тонку трубку (капіляр), то внаслідок змочування або незмочування рідиною стінок капіляра, кривизна поверхні рідини – меніск - стає значною. Тому в капілярі завжди існує додатковий тиск обумовлений кривизною поверхні. Він викликає зміну рівня рідини в капілярі порівняно з її рівнем у широкій посудині. У випадку змочування стінок капіляра рідина піднімається, якщо ж стінки капіляра рідиною не змочуються, то рідина опускається (див. рис. 17.5).

Явище зміни висоти рівня рідини у вузьких трубках отримало назву капілярність. Висота підняття або опускання рідини в капілярі визначається з рівності гідростатичного тиску стовпа рідини у капілярі додатковому тиску, що обумовлений дією сили поверхневого натягу, і визначається за наступною формулою:

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}\ ; \qquad (17.8)$$

де σ - коефіцієнт поверхневого натягу, θ - крайовий кут змочування; ρ - густина рідини; g - прискорення вільного падіння; r - радіус капіляра.

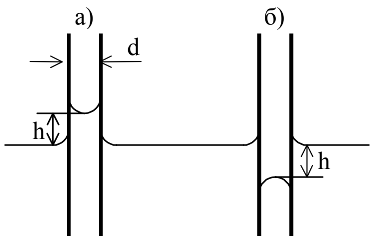

Рис. 17.5.

17.3. Тверді тіла. Кристали.

Тверді тіла характеризуються значним рівнем сил міжмолекулярної взаємодії, що обумовлює їх постійний об'єм і форму. Усі тверді тіла розподіляються на дві групи: кристалічні та аморфні тіла.

Упорядковане розташування у просторі окремих часток (атомів, молекул, іонів) отримало назву кристалів. Відсутність такої упорядкованості, обумовлює аморфну будову твердих тіл. Усі кристали розподіляються на монокристали та полікристали. Характерною особливістю кристалів є їх анізотропність, тобто залежність властивостей кристалів від напрямку їх вимірювання.

Упорядковане у просторі розташування кристалів в трьох вимірах отримало назву кристалічної решітки. А точки простору, відносно яких окремі частки звершують теплові коливання отримали назву вузлів кристалічної решітки.

Кристали класифікуються на основі кристалографічних та фізичних ознак. Кристалографічна ознака обумовлена різноманітними видами симетрії, їх більше 230 видів, які можуть бути у кристалічній решітці. Тому люба решітка можне бути побудована за допомогою повтору у трьох напрямках одного й того ж структурного елементу, який отримав назву елементарної комірки (див. рис. 17.6).

Фізична ознака обумовлює вид частинок, що знаходяться в вузлах кристалічної решітки. За цією ознакою виділяють іонні, атомні, металічні та молекулярні кристали.

В вузлах іонних кристалів почергово розташовані іони протилежного знака. Наприклад, до цих кристалів належать, кристали повареної солі (NaCl). Сили взаємодії між іонами цих кристалів обумовлені кулонівським притяганням, а енергія зв'язку складає $E_i \approx 5\ 10^6$ Дж/моль.

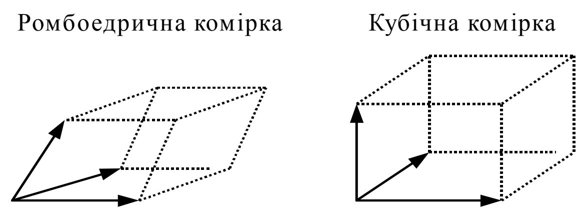

Рис. 17.6.

В вузлах атомних кристалів розташовані нейтральні атоми, які удержуються в них за допомогою ковалентних зв'язків. Атомними кристалами є алмаз і більшість чистих напівпровідників (Si, Ge). Енергія зв’язку в атомних кристалах складає $E_i \approx 10\ 10^6$ Дж/моль.

В вузлах металевих кристалів розташовані позитивні іони металів (Na, Cu), які утримуються в них за допомогою металевих зв'язків. Металеві кристали це, як правило, полікристали. Між іонами металевих кристалів рухаються вільні електрони, які і обумовлюють добру їх електропровідність. Енергія зв’язку в металевих кристалах складає $E_i \approx 1\ 10^6$ Дж/моль.

В вузлах молекулярних кристалів розташовані нейтральні молекули речовини (парафін, лід), сили взаємодії між якими обумовлені незначним зміщенням електронів в електронних оболонках атомів. Ці сили отримали назву ван-дер-вальсових, тому, що вони подібні до сил притягання між молекулами у реальних газах. Енергія зв’язку в молекулярних кристалах складає $E_i \approx 0{,}1\ 10^6$ Дж/моль.

Розташування атомів в кристалах визначається координаційним числом – тобто кількістю найближчих до даного атома сусідніх атомів у кристалічній решітці або молекул в молекулярних кристалах. Чим більше координаційне число тім щільніше упаковка атомів у кристалічній решітці, а значить і густина речовини зросте.

17.4. Пружні властивості твердих тіл.

Розглянемо подовжню деформацію абсолютно пружного суцільного тіла довжиною dx, що відбувається під дією зовнішньої сили F (див. рис. 17.7). При цьому кожна точка пружного тіла зміщується на величину U(x).

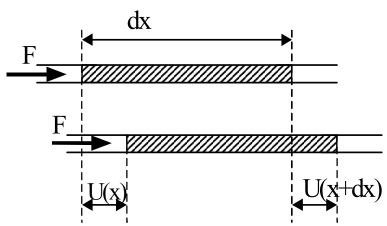

Рис. 17.7.

Відносне подовження тіла, у відповідності з виразом (4.2), дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{U(x+dx)-U(x)}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x}\ ; \quad (17.9)$$

Використовуючи закон пружності Гука, знайдемо величину зовнішньої сили F, що діє на тіло:

$$F = \sigma\, S = \varepsilon\, E\, S\ ; \quad (17.10)$$

Праву частину рівняння (17.10) одночасно помножимо і поділимо на величину dx, і тоді, з урахуванням виразу (17.9), отримаємо:

$$F = \frac{d}{dx}(\varepsilon)\, dx\, E\, S = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\, dx\, ES\ ; \quad (17.11)$$

де E – модуль пружності твердого тіла.

З іншого боку, значення сили F можливо отримати використовуючи другий закон Ньютона. Тоді:

$$F = m\, a = \rho\, S\, dx\, a = \rho\, S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\, dx\ ; \quad (17.12)$$

де a – прискорення частинок твердого тіла; ρ – його густина.

Значення сили F не залежить від способу її визначення, тому порівнявши праві частини вище приведених формул, отримаємо:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\ ; \quad (17.13)$$

Рівняння (17.13) є рівнянням руху частинок у пружному тілі і як не важко переконатись воно тотожне хвильовому рівнянню (11.9).

Отже, за умови дії на тверде тіло зовнішньої сили, в ньому починають розповсюджуватись пружні хвилі, швидкість V і частота ω котрих може бути визначена з порівняння формул (17.13) та (11.9) :

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\ ; \qquad \omega = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\ ; \quad (17.14)$$

де λ - довжина пружної хвилі.

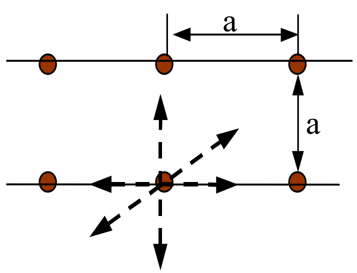

Рис. 17.8.

Однак найбільш достовірною моделлю твердого тіла є така, що розглядає їх як правильну кристалічну решітку в вузлах якої атоми коливаються біля своїх положень рівноваги у трьох взаємно перпендикулярних напрямках (див. рис. 17.8).

Якщо вважати, що у атомному ланцюжку діють тільки пружні сили, можливо отримати формули для визначення швидкості та частоти розповсюдження пружних хвиль у кристалічній решітці:

$$V = a\sqrt{\frac{\beta}{m}}\;; \quad \omega = \frac{2\pi a}{\lambda}\sqrt{\frac{\beta}{m}}\;; \qquad (17.15)$$

де a – відстань між атомами у кристалічній решітці; m – маса атома; β - мікроскопічний модуль пружності.

Співставлення правих частин у формулах (17.15) та (17.14) дозволяє отримати співвідношення між макроскопічними пружними параметрами твердого тіла та мікроскопічними показниками його будови:

$$a\sqrt{\frac{\beta}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\;; \qquad (17.16)$$

Експериментально модулі пружності твердих тіл та кристалів визначаються акустичним методом. Вимірявши швидкість та частоту розповсюджування хвилі у кристалі чи твердому тілі, з формул (17.14) і (17.15) неважко отримати значення модулів їх пружності.

Модулі пружності кристалів суттєво залежать від напрямку їх вимірювання, що пов’язано з анізотропією будови кристалів. Значення модулів пружності кристалів досягають дуже значних величин. Так модуль пружності кристалу осмію складає $E_{os} = 4\ 10^{11}$ Н/м^2.

Але пружні властивості реальних твердих тіл, що будуються з таких надзвичайно міцних кристалів, у тисячі разів менші. Це пояснюється впливом на їх фізичні властивості різноманітних дефектів. Вони поділяються на макроскопічні (тріщини, пустоти) та мікроскопічні, що обумовлені порушенням симетрії будови кристалів.

Мікроскопічні дефекти поділяються на точкові (вакансії, домішки заміщення та впровадження) та лінійні (краєві і гвинтові дислокації). Вакансії – це відсутність атома у вузлі кристалічної решітки. Домішки заміщення – це явище впровадження у кристалічну решітку атомів іншого хімічного елементу. Дислокації – це лінійні дефекти, що порушують чергування атомних площин у кристалічній решітці. В залежності від їх геометрії дислокації бувають крайовими і гвинтовими. Головною властивістю дислокацій є те, що вони можуть досить легко рухатись, розмножуватися та взаємодіяти з іншими дислокаціями. Щільність дислокацій вимірюється їхньою кількістю на одиницю площі і змінюється у межах $10^3 - 10^{12}$ см$^{-2}$. Для збільшення міцності кристала необхідно або ліквідувати дислокації зовсім, або значно збільшити їх кількість.

17.5. Теплові властивості твердих тіл.

Теплові властивості твердих тіл обумовлені коливанням атомів (іонів, молекул) відносно положення рівноваги в вузлах кристалічної решітки. Вони мають три коливальні ступеня свободи. Тому тверде тіло, згідно з законом рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи, має внутрішню енергію, яка дорівнює:

$$U = 3\ N\ kT\;; \qquad (17.17)$$

де N - кількість атомів.

Тоді молярна теплоємність C_V кристалів буде величиною сталою і її можливо визначити таким чином:

$$C_V = \frac{U}{\mu T} = \frac{3\mu N_A\, kT}{\mu T} = 3N_A\, k = 3R\;; \qquad (17.18)$$

де R – універсальна газова стала.

Отриманий вираз має назву закон Дюлонга і Пті.

Якщо молекула твердого тіла складається з n атомів, то цей закон набуває вигляду: $C_V = 3\ n\ R$.

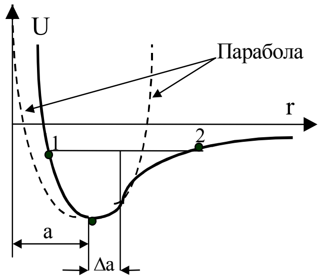

Рис. 17.9.

З ростом температури тверді тіла збільшують свої розміри у відповідності з такими співвідношеннями:

$$L = L_0\,(1 + \alpha\, t)\;; \qquad (17.19)$$

$$V = V_0\,(1 + \beta\, t)\;; \qquad (17.20)$$

де L_0, V_0 – довжина і об’єм тіла при температурі 0^0C; t – температура тіла за шкалою Цельсія; α, β - температурні коефіцієнти лінійного та об’ємного розширювання.

Теплове розширювання твердих тіл пояснюється не гармонічним характером коливання атомів у кристалічній решітці (див. рис. 17.9).

Якби коливання атомів були гармонічні, то вони відбувались би за параболічним законом і відстань між атомами залишалась би незмінною. Але реальні коливання відбуваються по закону, що зображений суцільною лінією на рис. 17.9. Тому за умови зростання температури, амплітуда коливань збільшується і вони відбуваються між точками 1 та 2, а це значить, що центр симетрії коливань зміститься на

$\Delta\alpha$.

Тобто відстань між двома атомами збільшиться і буде дорівнювати $r = \alpha + \Delta\alpha$. А це значить, що відбудеться теплове розширення твердого тіла за формулами 17.19 та 17.20.

17.6. Фази та фазові переходи. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса.

Якщо тверде тіло нагрівати, то енергія молекул буде зростати до тих пір, поки кристалічна решітка не почне руйнуватися, тобто тверде тіло почне плавитися. Температура плавлення буде при цьому постійною до тих пір, поки тіло цілком не розплавиться. Кількість теплоти, що потрібна для плавлення 1 кг речовини, отримала назву питомої теплоти плавлення. Процес охолоджування рідини, що веде до створення кристалів отримав назву кристалізації.

Фазою називається рівноважний стан термодинамічної системи, що відрізняється своїми фізичними та хімічними властивостями від інших імовірних рівноважних станів тієї ж речовини. Перехід речовини з однієї фази в іншу називається фазовим переходом. Фазові переходи можуть бути першого та другого роду.

Під час фазових переходів першого роду відбувається поглинання або виділення деякої кількості теплоти, що називається теплотою фазового переходу. Фазові переходи першого роду характеризуються постійністю температури, зміною ентропії та об'єму речовини.

Фазові переходи, при яких теплота не виділяється і не поглинається називаються фазовими переходами другого роду. При цих переходах залишаються постійними об'єм і ентропія, а теплоємність різко змінюється. Приклади фазових переходів другого роду: перетворення феромагнітних речовин (залізо, нікель) у парамагнітний стан; перехід речовини при $T \approx 4K^0$ у надпровідний стан.

Фазові переходи зображаються за допомогою діаграм стану на якій в координатах P та T зображається залежність між температурою фазового переходу і тиском у вигляді кривих: випаровування (КВ), плавлення (КП) та сублімації (КС). Криві поділяють поле діаграми на три області, які відповідають умовам існування твердої, рідкої і газоподібної фаз (див. рис. 17.10). Крива випаровування КВ завершується

у критичній точці К, бо фізично імовірний перехід рідини у газ без перетину кривої випаровування, тобто імовірний термодинамічний процес при якому не відбувається фазових перетворень. Утім перетворення кристалічної речовини у рідину чи газ може бути здійснено тільки за допомогою фазового переходу. Тому крива плавлення йде у нескінченність, а крива сублімації йде у точку де температура та тиск наближаються до нуля.

Кожна точка кривої на рис. 17.10, відповідає умовам існування двох відповідних фаз: КВ - рідини і газу; КП - твердого тіла і рідини; КС - твердого тіла і газу. Точка в якій перетинаються усі три криві називається потрійною точкою. Вона визначає температуру $T_п$ і тиск $P_п$, при яких одночасно існують три фази речовини: рідка, тверда та газоподібна. Кожна речовина має лише одну потрійну точку.

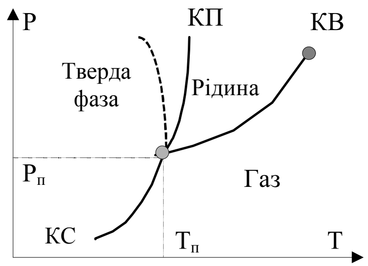

Рис. 17.10.

Зміна температури фазового переходу (dT) в залежності від зміни тиску (dP) при фазовому переході визначається наступним рівнянням Клапейрона-Клаузіуса:

$$dT = \frac{T\left(V_2 - V_1\right)}{Q} dP \ ; \quad (17.21)$$

де Q - теплота фазового переходу;
V_2-V_1 - зміна об'єму речовини;
T - температура.

Для більшості речовин, їх об'єм при фазових перетвореннях збільшується, тобто $V_2 - V_1 > 0$, але є й такі (вода, чавун) для яких $V_2 - V_1 < 0$ (пунктирна крива на рис. 17.10).

17.7. Контрольні запитання.

1. Чим обумовлене існування поверхневого натягу у рідини?
2. Наведіть формулу Лапласа і поясніть її.
3. За якими ознаками класифікуються кристали?
4. Наведіть закон Дюлонга і Пті та поясніть його.
5. Що називається фазовими переходами першого та другого роду? Наведіть приклади таких переходів.
6. Що називається потрійною точкою і які її властивості?

7. Поясніть, чому тверді тіла при нагріванні розширюються?

РОЗДІЛ ДРУГИЙ

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Загальні вказівки до виконання контрольних робіт.

1. За час вивчення курсу фізики студент повинен виконати та здати на кафедру фізики шість контрольних робіт. Номери задач, які студент повинен включити в свою контрольну роботу, визначаються по таблицях варіантів лаборантами кафедри при отриманні завдання.

2. Контрольні роботи треба виконувати в шкільному зошиті, на обкладинці якого привести відомості за наступним зразком:

Контрольна робота № ___ з загальної фізики

Студента групи ПЦБ - 00 – 1 Кисельова А.В.

3. Умови задач у контрольній роботі треба переписувати повністю. Рішення задач потрібно супроводити короткими, але вичерпними поясненнями. У тих випадках, коли це потрібно, обов’язково приводить креслення, що пояснюють розв’язування задачі.

4. Розв’язувати задачі треба в загальному вигляді, тобто виразити шукану величину в буквених позначеннях параметрів, що задані в умові задачі. Числові значення при підстановці їх в розрахункову формулу і отриману відповідь потрібно давати в одиницях системи СІ, за винятком випадків коли в умові задачі вказано інше. Обчислення треба проводити з дотриманням правил приблизних обчислень, до трьох значущих цифр. При запису відповіді, числові значення потрібно записувати як добуток десяткового дробу з однією значущою цифрою перед комою на відповідну міру десяти. Наприклад, замість 0,00129 треба записувати $1{,}29\ 10^{-3}$.

5. Розв’язування деяких задач потребує використовування даних про фізичні константи та властивості об’єктів, які в цих задачах згадуються. Ці дані треба брати з відповідних таблиць, що наведені у кінці цього підручника.

6. Кожна контрольна робота повинна завершуватися <u>таблицею відповідей</u> за наступним зразком:

	Відповідь на задачі					
Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
17	11 м/с	1,2 с; 6 Н;	π, рад	$4{,}2\ 10^{9}$ Дж	у 2 рази	15,6 Па

2. Таблиця варіантів контрольної роботи № 1.

Варіант	Номери завдань					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1.1	1.19	1.28	1.131	1.77	1.104
2	1.2	1.20	1.29	1.132	1.78	1.105
3	1.3	1.21	1.30	1.133	1.79	1.106
4	1.4	1.22	1.31	1.134	1.80	1.107
5	1.5	1.23	1.32	1.135	1.81	1.108
6	1.6	1.24	1.33	1.136	1.82	1.109
7	1.7	1.25	1.34	1.137	1.83	1.110
8	1.8	1.26	1.35	1.138	1.84	1.111
9	1.9	1.27	1.36	1.139	1.85	1.112
10	1.10	1.26	1.37	1.140	1.86	1.113
11	1.11	1.25	1.38	1.141	1.87	1.114
12	1.12	1.24	1.39	1.142	1.88	1.115
13	1.13	1.23	1.40	1.143	1.89	1.116
14	1.14	1.22	1.41	1.144	1.90	1.117
15	1.15	1.21	1.42	1.145	1.91	1.118
16	1.16	1.20	1.43	1.146	1.92	1.119
17	1.17	1.19	1.44	1.147	1.93	1.120
18	1.18	1.69	1.45	1.148	1.94	1.121
19	1.12	1.70	1.46	1.149	1.95	1.122
20	1.11	1.71	1.47	1.150	1.96	1.123
21	1.10	1.72	1.48	1.151	1.97	1.124
22	1.9	1.73	1.49	1.152	1.98	1.125
23	1.8	1.74	1.50	1.153	1.99	1.126
24	1.7	1.75	1.51	1.154	1.100	1.127
25	1.6	1.76	1.52	1.155	1.101	1.128
26	1.5	1.64	1.53	1.156	1.102	1.129
27	1.4	1.65	1.54	1.157	1.103	1.130
28	1.3	1.66	1.55	1.158	1.102	1.129
29	1.2	1.67	1.56	1.159	1.101	1.128
30	1.1	1.68	1.57	1.160	1.100	1.127

3. Завдання контрольної роботи № 1.

1.1. Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю V_0 = 4 м/с. Коли воно досягло верхньої точки польоту з того ж початкового пункту, з тією ж початковою швидкістю V_0 вертикально вгору кинуте друге тіло. На якій відстані h від початкового пункту зустрінуться тіла? Опір повітря не враховувати.

1.2. Матеріальна точка рухається прямолінійно з прискоренням a =5 м/с^2. Визначити, на скільки шлях, пройдений точкою в n секунду, буде більше шляху, пройденого в n-1 секунду. Прийняти V_0=0.

1.3. Дві автомашини рухаються по дорогах, кут між якими β = 60°. Швидкість автомашин V_1 = 54 км/г і V_2 = 72 км/г. З якою швидкістю віддаляються машини одна від одної ?

1.4. Матеріальна точка рухається прямолінійно з початковою швидкістю V_0=10 м/с і постійним прискоренням a = - 5 м/с^2. Визначити, у скільки разів шлях S, пройдений матеріальною точкою, буде перевищувати модуль її переміщення Δr через t = 5 с., після початку відліку часу.

1.5. Велосипедист їхав з одного пункту в інший. Першу третину шляху він проїхав з швидкістю V_1 = 18 км/год. У подальшому половину часу, що залишився він їхав з швидкістю V_2 = 22 км/год, після чого до кінцевого пункту він йшов пішки з швидкістю V_3 = 5 км/год. Визначить середню швидкість велосипедиста.

1.6. Тіло кинуте під кутом β = 30° до горизонту з швидкістю V_0 = 30 м/с. Якими будуть нормальне a_n і тангенціальне a_τ прискорення тіла через час t = 1 с після початку руху ?

1.7. Матеріальна точка рухається по колу з постійною кутовою швидкістю ω = π/6 рад/с. У скільки разів шлях S, пройдений точкою за час t = 4 с, буде більшим модуля її переміщення Δr ? Прийняти, що в початковий момент часу радіус-вектор r, що задає положення точки, був повернутий, відносно початкового положення, на кут φ_0 = π/3 рад.

1.8. Матеріальна точка рухається в площині Х-У згідно з рівняннями $X = A_1+B_1t+C_1t^2$ і $Y = A_2+B_2t+C_2t^2$, де B_1 = 7 м/с, C_1 = - 2 м/с^2, B_2 = - 1 м/с, C_2 = 0,2 м/с^2. Знайти модулі швидкості та прискорення точки в момент часу t = 5 с.

1.9. Залежність пройденого тілом шляху S від часу t дається рівнянням, $S=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, де C=0,14 м/с^2 і D=0,01 м/с^3. Через який час t після початку руху тіло буде мати прискорення *a* = 1 м/с^2? Знайти середнє прискорення тіла за цей проміжок часу.

1.10. На скільки переміститься відносно берега човен довжиною L=3,5 м і масою m_1 = 200 кг, якщо стоячи на кормі людина масою m_2=80 кг переміститься на ніс човна? Вважати човен розташованим перпендикулярно берегу.

1.11. З вежі висотою h=25 м горизонтально кинуто камінь з швидкістю V_X = 15 м/с. Який час t камінь буде рухатись? На якій відстані L від основи вежі він впаде на землю? З якою швидкістю V він впаде на землю? Який кут φ складе траєкторія каменя з горизонтом в точці його падіння на землю?

1.12. Камінь, кинутий горизонтально, впав на землю через час t = 0,5 с на відстані L = 5 м по горизонталі від місця кидання. З якої висоти кинутий камінь? З якою швидкістю він впаде на землю? Який кут φ складе траєкторія каменя з горизонтом в точці його падіння на землю?

1.13. По краю платформи, що рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω = 1 рад/с, йде людина. Вона обходить платформу за час t = 9,9 с. Яке найбільше прискорення має людина у цьому випадку відносно землі? Радіус платформи R=2 м.

1.14. Точка рухається по колу радіусом R=30 см з постійним кутовим прискоренням ε. Визначити тангенціальне прискорення точки, якщо відомо, що за час t = 4 с вона здійснила три оберти і в кінці третього оберту її нормальне прискорення дорівнювало a_n = 2,7 м/с^2.

1.15. Точка рухається по колу радіусом R = 4 м. Закон її руху описується рівнянням $S = A - Bt^2$, де A = 8 м, B = - 2 м/с^2. Визначити момент часу t, коли нормальне прискорення a_n точки дорівнює 9 м/с^2. Знайти швидкість V, тангенціальне a_τ і повне прискорення точки в цей же момент часу.

1.16. Дві матеріальні точки рухаються згідно з рівняннями $X_1=A_1t+B_1 t^2+C_1 t^3$ та $X_2 = A_2t+B_2t^2+C_2t^3$; де A_1=4 м/с, B_1=8 м/с^2, C_1 = - 16 м/с^3, A_2=2 м/с, B_2 = - 4 м/с^2, C_2 = 1 м/с^3. У який момент часу t прискорення цих точок будуть однакові? Знайти швидкості V_1 та V_2 точок в цей момент.

1.17. Камінь кинутий горизонтально з швидкістю V_X = 10 м/с. Знайти радіус кривизни R траєкторії каменю через час t = 3 с після початку його руху.

1.18. М'яч кинутий з швидкістю V_0=10 м/з під кутом β=40° до горизонту. На яку висоту h підніметься м'яч? На якій відстані L від місця кидання він впаде на землю? Який час t він буде в рухатись?

1.19. Вісь з двома дисками, що розташовані на відстані L=0,5 м один від одного, обертається з частотою n=1600 об/хв. Куля, що летить вздовж осі, пробиває обидва диски; при цьому отвір від кулі у другому диску зміщений відносно отвору в першому диску на кут β=12°. Знайти швидкість V кулі.

1.20. Знайти радіус R колеса, яке обертається, якщо відомо: лінійна швидкість V_1 точки, що знаходиться на ободі, у 2,5 рази більше лінійної швидкості V_2 точки, що знаходиться на відстані R = 5 см ближче до осі колеса.

1.21. Колесо, обертаючись рівноприскорено, досягло кутової швидкості ω =20 рад/с через 10 обертів після початку руху. Знайти кутове прискорення ε колеса.

1.22. Колесо, обертаючись рівноприскорено, через одну хвилину після початку обертання мало частоту n =720 об/хв. Знайти кутове прискорення і число обертів колеса за цей час.

1.23. Колесо, обертаючись рівноуповільнено, за час t=1 хв. зменшило свою частоту з n_1=300 об/хв. до n_2=180 об/хв. Знайти кутове прискорення і число обертів колеса за цей час.

1.24. Вентилятор обертається з частотою n=900 об/хв. Після вимкнення вентилятор, обертаючись рівноуповільнено, зробив до зупинки N=75 обертів. Який час t пройшов з моменту виключення вентилятора до повної його зупинки?

1.25. Вал обертається з частотою n=180 об/хв. З деякого моменту вал почав обертатися рівноуповільнено з кутовим прискоренням ε=3 рад/с^2. Через який час вал зупиниться? Знайти число обертів вала до зупинки.

1.26. Точка рухається по колу радіусом R=20 см з постійним тангенціальним прискоренням a_τ = 5 см/с^2. Через який час t після початку руху нормальне прискорення a_n точки буде дорівнює тангенціально-

му?

1.27. Точка рухається по колу радіусом R=10 см з постійним тангенціальним прискоренням a_τ. Знайти нормальне прискорення a_n точки через час t=20 с після початку її руху, якщо відомо, що в кінці п'ятого оберту після початку руху, лінійна швидкість точки є V=10 см/с.

1.28. При горизонтальному польоті з швидкістю V=250 м/с снаряд масою m=8 кг розірвався на дві частини. Велика частина масою m_1 =6 кг отримала швидкість U_1=400 м/с в напрямку польоту снаряда. Визначити модуль і напрямок швидкості U_2 меншої частини снаряда.

1.29. З возика, що вільно рухається по горизонтальному шляху з швидкістю V_1=3 м/с, у бік протилежний руху возика, стрибає людина. Після цього швидкість возика змінилася і стала рівною U_1=4 м/с. Визначить горизонтальну складову швидкості людини U_2 при стрибку відносно возика. Маса возика m_1=210 кг, маса людини m_2=70 кг.

1.30. Гармата, що жорстко закріплена на залізничній платформі, зробила постріл вздовж полотна залізниці під кутом β = 30° до лінії горизонту. Визначити швидкість U_2 відкоту платформи, якщо снаряд вилітає з швидкістю U_1= 480 м/с. Маса платформи з гарматою і снарядами m_2=18 т, маса одного снаряда m_1=60 кг.

1.31. Яку силу F треба прикласти до вагона, що стоїть на рейках, щоб він став рухатися рівноприскорено і за час t =30 с пройшов шлях S = 11 м ? Маса вагона m=16 т. Під час руху на вагон діє сила тертя $F_{тр}$, що дорівнює 0,05 сили його ваги.

1.32. Снаряд, що летів з швидкістю V=400 м/с, у верхній точці траєкторії розірвався на два осколки. Менший осколок, маса якого становить 40 % від маси снаряда, полетів в протилежному напрямку з швидкістю U_1=150 м/с. Визначить швидкість U_2 більшого осколку.

1.33. Який кут β з горизонтом складає поверхня бензину в баку автомобіля, що рухається з прискоренням a = 2,44 м/с^2 ?

1.34. Куля на нитці підвішена до стелі трамвайного вагона. Вагон гальмується, і його швидкість за час t=3 с рівномірно зменшується від 18 до 6 км/год. На який кут відхилиться при цьому нитка з кулею?

1.35. Вагон гальмується, і його швидкість за час t =3,3 с рівномірно зменшується від 47,5 до 30 км/год. Яким повинен бути граничний коефіцієнт тертя k між чемоданом і полицею, щоб чемодан при гальмуванні не почав ковзати по полиці?

1.36. Людина, що стоїть в човні, зробила шість кроків вздовж нього і зупинилася. На скільки кроків пересунувся човен, якщо маса човна в два рази більша маси людини?

1.37. Човен довжиною L=3 м і масою m=120 кг стоїть на спокійній воді. На носу і кормі знаходяться два рибалки масами m_1=60 кг і m_2=90 кг. На скільки зсунеться човен відносно води, якщо рибалки поміняються місцями ?

1.38. У дерев'яний шар масою m_1 = 8 кг, який підвішений на нитці довжиною L = 1,8 м, попала куля масою m_2 = 4 г, що летіла горизонтально. З якою швидкістю летіла куля, якщо шар з застряглою в ньому кулею відхилилася від вертикалі на кут $\beta = 3°$?

1.39. По невеликому шматку м'якого заліза, що лежить на ковадлі масою m_1=300 кг, ударяє молот масою m_2=8 кг. Визначити ККД удару, якщо удар абсолютно непружний. Корисною вважати енергію, що затрачена на деформацію шматка заліза.

1.40. Шар масою m_1=1 кг рухається з швидкістю V_1=4 м/с і стикається з шаром масою m_2=2 кг, що рухається йому назустріч з швидкістю V_2=3 м/с. Якими будуть швидкості U_1 і U_2 шарів після удару?

1.41. Шар масою m_1=3 кг рухається з швидкістю V_1=2 м/с і стикається з шаром масою m_2=5 кг, який покоївся. Яка робота буде звершена при деформації шарів?

1.42. Визначити ККД непружного удару бойка масою m_1=0,5 т, який впав на палю масою m_2=120 кг. Корисної вважати енергію, затрачену на забиття палі.

1.43. Шар масою m_1=4 кг рухається з швидкістю V_1 = 5м/с і стикається з шаром масою m_2=6 кг, що рухався йому назустріч з швидкістю V_2=2 м/с. Визначить швидкості U_1 і U_2 шарів після удару.

1.44. З жорстко закріпленого автоматичного пістолета вилетіла куля масою m_1=10 г з швидкістю V=300 м/с. Затвор пістолета масою m_2=200 г притискається до ствола пружиною, жорсткість якої k = 25 кН/м. На яку відстань відійде затвор після пострілу?

1.45. Куля масою m_1 =10 кг стикається з кулею масою m_2 = 4 кг. Швидкість першої кулі V_1 = 4 м/с, другої - V_2 = 12 м/с. Знайти загальну швидкість U куль після удару у випадках: 1) мала куля доганяє велику кулю, що рухається у тому ж напрямку; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

1.46. Шар масою m_1=5 кг рухається з швидкістю V_1=1 м/с і стикається з шаром масою m_2=2 кг, що покоївся. Визначити швидкості U_1 і U_2 шарів після удару. Удар вважати абсолютно пружним.

1.47. З гармати проводилася стрільба в горизонтальному напрямку. Коли гармата була нерухомо закріплена, снаряд вилетів з швидкістю V_1=600 м/с, а коли гарматі дали можливість вільно відкочуватися назад, снаряд вилетів з швидкістю V_2=580 м/с. З якою швидкістю відкотилася при цьому гармата ?

1.48. Шар масою m_1=2 кг стикається з шаром більшої маси, який покоївся, і при цьому втрачає 40 % кінетичної енергії. Визначити масу m_2 більшого шару. Удар вважати абсолютно пружним.

1.49. Визначити роботу розтягнення двох зчеплених послідовно пружин з коефіцієнтами жорсткості k_1=400 Н/м та k_2=250 Н/м, якщо перша пружина при цьому розтяглася на ΔL=2 см.

1.50. З шахти глибиною h=600 м підіймають кліть масою m_1= 3,0 т на канаті, кожний метр якого має масу m=1,5 кг. Яка робота здійснюється при піднятті кліті на поверхню Землі? Який коефіцієнт корисної дії η підіймального пристрою?

1.51. Пружина жорсткістю k=500 Н/м стиснута силою F=100 Н. Визначити роботу зовнішньої сили, що додатково стискає пружину ще на ΔL=2 см.

1.52. У човні масою M = 240 кг стоїть людина масою m = 60 кг. Човен пливе з швидкістю V = 2 м/с. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямі з швидкістю U = 4 м/с. Знайти швидкість човна після стрибка людини в сторону, протилежну руху човна.

1.53. З пружинного пістолета вистрілили пулькою, маса якої m = 5 г. Жорсткість пружини k = 1,25 кН/м. Пружина була стисла на ΔL = 8 см. Визначити швидкість пульки при вильоті її з пістолета.

1.54. Шар масою m_1 = 200 г, що рухався з швидкістю V_1 = 10 м/с, стикається з нерухомим шаром масою m_2 = 800 г. Визначити швидкості шарів після зіткнення. Удар абсолютно пружний.

1.55. Шар, що рухався горизонтально, зіткнувся з нерухомим шаром і передав йому 64 % своєї кінетичної енергії. Шари абсолютно пружні, удар прямий, центральний. У скільки разів маса другого шару більше маси першого?

1.56. Тіло ковзає по похилій площині, що складає з горизонтом кут $\varphi = 45°$. Залежність пройденого тілом шляху S від часу t дається рівнянням $S = Ct^2$, де $C = 1{,}73$ м/с^2. Знайти коефіцієнт тертя k тіла об площину.

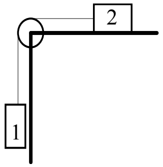

Рис. 1.1.

1.57. Невагомий блок укріплений на кінці стола (див. рис. 1.1). Гирі 1 і 2 однакових мас $m_1 = m_2 = 1$ кг зчеплені ниткою і перекинені через блок. Коефіцієнт тертя гирі 2 об стіл $k = 0{,}1$. Знайти прискорення з яким рухаються гирі і силу натягу нитки T. Тертям в блоці знехтувати.

1.58. Яку треба здійснити роботу, щоб пружину жорсткістю k=800 Н/м, стисну на ΔX_1=6 см, ще стиснути на ΔX_2=8 см?

1.59. Якщо на верхній кінець вертикально розташованої спіральної пружини покласти вантаж, то пружина стиснеться на ΔL=3 мм. На скільки стисне пружину той же вантаж, якщо він впаде на цю пружину з висоти h = 8 см?

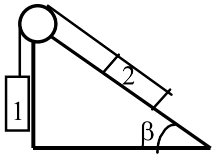

Рис. 1.2.

1.60. Невагомий блок закріплений на вершині похилої площини складає з горизонтом кут $\beta = 30°$ (див. рис. 1.2). Гирі 1 і 2 однакової маси $m_1 = m_2 = 1$ кг зчеплені ниткою, що перекинута через блок. Знайти прискорення з яким рухаються гирі і силу натягу нитки T. Тертям гирі 2 об похилу площину знехтувати.

1.61. Розв'язати попередню задачу при умові, що коефіцієнт тертя гирі 2 об похилу площину k = 0,1.

1.62. З пістолета з пружиною жорсткістю k=150 Н/м був зроблений постріл кулею масою m=8 г. Визначити швидкість кулі при вильоті її з пістолета, якщо пружина була стисла на ΔX = 4 см.

1.63. Дві гирі з масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 1$ кг зчеплені ниткою і перекинені через невагомий блок. Знайти прискорення з яким рухаються гирі і силу натягу нитки T. Тертям у блоці знехтувати.

1.64. Налетівши на пружинний буфер вагон масою m=16 т, що рухався з швидкістю V=0,6 м/с, зупинився, стиснувши пружину на ΔL=8 см. Знайти загальну жорсткість k пружин буфера.

1.65. Яка робота повинна бути звершена при піднятті із землі матеріалів для спорудження циліндричної димохідної труби висотою h = 40 м, зовнішнім діаметром D = 3 м і внутрішнім діаметром d=2 м? Густину матеріалу прийняти рівною $\gamma = 2{,}8\ 10^3$ кг/м3.

1.66. На двох паралельних пружинах однакової довжини висить невагомий стержень довжиною L=10 см. Жорсткість пружин k_1=2 Н/м і k_2 =3 Н/м. У якому місці стержня, відраховуючи від першої пружини, треба підвісити вантаж, щоб стержень залишався горизонтальним?

1.67. Гиря масою m = 0,5 кг, що прив'язана до гумового шнура довжиною L_0, описує в горизонтальній площині коло. Частота обертання гирі n = 2 об/с. Кут відхилення гумового шнура від вертикалі $\varphi = 30°$. Жорсткість шнура k = 0,6 кН/м. Знайти довжину L_0 нерозтягнутого гумового шнура.

1.68. Вантаж масою m= 0,5 кг, прив'язаний до гумового шнура довжиною L_0 = 9,5 см, відхиляють на кут $\varphi = 90°$ і відпускають. Знайти довжину L гумового шнура в момент проходження вантажем положення рівноваги. Жорсткість шнура k = 1 кН/м.

1.69. Яка робота буде звершена силами гравітаційного поля при падінні на Землю тіла масою m = 2 кг з висоти h = 1000 км.

1.70. З нескінченності на поверхню Землі падає метеорит масою m=30 кг. Визначити роботу, яка при цьому буде виконана силами гравітаційного поля Землі.

1.71. По круговій орбіті навколо Землі обертається супутник з періодом T = 90 хв. Визначити висоту супутника.

1.72. На якій відстані від центра Землі знаходиться точка, в якій напруженість сумарного гравітаційного поля Землі і Місяця рівна нулю? Прийняти, що маса Землі в 81 раз більше маси Місяця і що відстань від центра Землі до центра Місяця дорівнює 60 радіусам Землі.

1.73. Супутник обертається навколо Землі по круговій орбіті на висоті h=520 км. Визначити період обертання супутника.

1.74. Визначити лінійну і кутову швидкості супутника Землі, що обертається по круговій орбіті на висоті h =1000 км.

1.75. У скільки разів середня густина земної речовини відрізняється від густини місячної? Прийняти, що радіус Землі у 3,9 рази більше радіуса Місяця і вага тіла на Місяці в 6 раз менша ваги тіла на Землі.

1.76. Штучний супутник обертається навколо Землі по круговій орбіті на висоті H = 3200 км над поверхнею Землі. Визначити лінійну швидкість супутника.

1.77. До обода колеса радіусом R = 0,5 м і масою m = 50 кг прикладена дотична сила F = 98,1 Н. Знайти кутове прискорення колеса. Через який час t після початку дії сили, колесо буде мати частоту обертання n = 100 об/с ? Колесо вважати однорідним диском.

1.78. До краю стола прикріплений блок (див. рис. 1.1). Через блок перекинена невагома нитка, до кінців якої прикріплені вантажі. Один вантаж рухається по поверхні стола, а інший - вздовж вертикалі вниз. Визначити коефіцієнт тертя між поверхнею вантажу і столу, якщо маса кожного вантажу і маса блоку однакові і вантажі рухаються з прискоренням a = 5,6 м/с^2. Силою тертя на блоці нехтувати.

1.79. Кулька масою m=60 г, що прив'язана до кінця нитки довжиною L_1=1,2 м, обертається з частотою n_1=2 с$^{-1}$, опираючись на горизонтальну площину. Нитка скорочується, наближаючи кульку до осі на відстань L_2=0,6 м. З якою частотою n_2, буде при цьому обертатися кулька? Яку роботу здійснює зовнішня сила, укорочуючи нитку?

1.80. Маховик, момент інерції якого J = 63,6 кгм^2, обертається з кутовою швидкістю ω = 31,4 рад/с. Найти момент сил гальмування M, під дією якого маховик зупиняється через час t = 20 с. Маховик вважати однорідним диском.]

1.81. Маховик радіусом R = 0,2 м і масою m = 10 кг зчеплений з мотором за допомогою привідного ременя. Сила натягу ременя, що йде без ковзання, T = 14,7 Н. Яку частоту обертання буде мати маховик через час t = 10 с після початку руху? Маховик вважати однорідним диском. Тертям знехтувати.

1.82. По дотичній до шківа маховика у вигляді диска діаметром D = 75 см і масою m = 40 кг прикладена сила F = 1 кН. Визначити кутове прискорення ω і частоту обертання n маховика через час t = 10 с після початку дії сили, якщо радіус шківа r = 12 см.

1.83. На обід маховика діаметром D=60 см намотаний шнур, до кінця якого прив'язаний вантаж масою m=2 кг. Визначити момент інерції J маховика, якщо він обертаючись рівноприскорено під дією сили ваги вантажу, за час t=3 с придбав кутову швидкість ω=9 рад/с.

1.84. Нитка з прив'язаними до її кінців вантажами масами m_1 =50 г та m_2 = 60 г перекинута через блок діаметром D=4 см. Визначити момент інерції J блока, якщо під дією сили ваги вантажів він отримав кутове прискорення ε = 9 рад/с^2. Тертям нитки по блоку знехтувати.

1.85. Стержень обертається навколо осі, що проходить через його середину, у відповідності з рівнянням φ = A t+B t^3, де A=2 рад/с, B=0,2 рад/с^3. Визначити момент сил, що буде діяти на стержень через t = 2 с після початку його руху. Момент інерції стержня J = 0,048 кг м^2.

1.86. Визначити момент сили M, який необхідно прикласти до блока, що обертається з частотою n = 12 с$^{-1}$, щоб він зупинився протягом часу t = 8 с. Діаметр блоку D = 30 см. Масу блоку m = 6 кг вважати рівномірно розподіленою по ободу.

1.87. Циліндр, розташований горизонтально, може обертатися навколо осі, що співпадає з віссю циліндра. Маса циліндра 12 кг. На циліндр намотали шнур, до якого прив'язали гирю масою m_2 = 1 кг. З яким прискоренням буде опускатися гиря? Яка сила натягу шнура під час руху гирі?

1.88. Через блок масою M = 200 г, виконаний у вигляді колеса, перекинена нитка, до кінців якої прив'язані вантажі масами m_1 = 100 г і m_2 = 300 г. Визначити прискорення, з яким будуть рухатися вантажі, і сили натягу нитки по обидві сторони блока.

1.89. Двом однаковим маховикам, що знаходяться в спокої, надали однакову кутову швидкість ω = 63 рад/с і надали їх самим собі. Під дією сил тертя перший маховик зупинився через одну хвилину, а другий зробив до повної зупинки N=360 обертів. У скільки разів момент сил тертя у першого маховика був більшим ніж у другого?

1.90. Куля скочується з похилої площини висотою h = 90 см. Яку лінійну швидкість буде мати центр кулі у момент, коли вона скотиться з похилої площини?

1.91. На верхній поверхні горизонтального диска, який може обертатися навколо вертикальної осі, прокладені по колу радіусом R =50 см рейки іграшкової залізниці. Маса диска M=10 кг, а його радіус R=60 см. На рейки нерухомого диска був поставлений заводний паровозик масою m = 1 кг. Він почав рухатися відносно рейок з швидкістю V = 0,8 м/с. З якою кутовою швидкістю буде обертатися диск?

1.92. Блок, що має форму диска масою 0,4 кг, обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені вантажі масами 0,3 кг та 0,7 кг. Визначити сили натягу T_1 і T_2 нитки по обидві сторони блоку.

1.93. Куля масою m = 1 кг, що котиться без ковзання, ударяється об стінку і відкочується від неї. Швидкість кулі до удару об стінку V = 10 см/с, після удару - U = 8 см/с. Найти кількість теплоти Q, що виділилася при ударі кулі об стіну.

1.94. Диск діаметром D=60 см і масою m=1 кг обертається навколо осі, що проходить через його центр з частотою n=20 об/с. Яку роботу A треба здійснити, щоб зупинити диск?

1.95. До кінців легкої і нерозтяжної нитки, перекиненої через блок, підвішені вантажі масою m_1= 0,2 кг і m_2=0,3 кг. У скільки разів відрізняються сили, діючі на нитку по обидві сторони від блоку, якщо маса блоку m=0,4 кг, а його вісь рухається вертикально вгору з прискоренням a = 2 м/с^2 ? Силами тертя знехтувати.

1.96. Платформа у вигляді диска діаметром D=3 м і масою m_1=180 кг може обертатися навколо вертикальної осі. З якою кутовою швидкістю ω_1 буде обертатися ця платформа, якщо по її краю піде людина масою m_2 = 70 кг з швидкістю V=1,8 м/с відносно платформи?

1.97. Платформа, що має форму диска, може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина. На який кут повернеться платформа, якщо людина піде вздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться в початкову точку? Маса платформи m_1 = 280 кг, маса людини m_2 = 80 кг.

1.98. Однорідний стержень довжиною L = 1 м може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через один з його кінців. У інший кінець стержня ударяє куля масою m = 7 г, що летіла перпендикулярно стержню і його осі. Удар кулі був абсолютно непружним. Визначити масу стержня, якщо внаслідок попадання кулі він відхилиться на кут φ=60°. Швидкість кулі була V=360 м/с.

1.99. На краю платформи у вигляді диска, що обертається за інерцію навколо вертикальної осі з частотою n_1= 8 хв.$^{-1}$, стоїть людина масою m = 70 кг. Коли людина перейшла в центр платформи, вона стала обертатися з частотою n_2= 10 хв$^{-1}$. Визначити масу платформи. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

1.100. Горизонтальна платформа масою m_1=150 кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, з частотою n= 8 хв$^{-1}$. Людина масою m_2 = 70 кг стоїть при цьому на краю платформи. З якою кутовою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центра? Вважати платформу однорідним диском, а людину - матеріальною точкою.

1.101. Однорідний стержень довжиною L= 1 м і масою M= 0,7 кг підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стержня. У точку, віддалену від осі обертання на $^2/_3$L абсолютно пружно ударяє куля масою m=5 г, що летіла перпендикулярно стержню і його осі. Після удару стержень відхилився на кут φ=60^0. Визначити швидкість кулі до удару.

1.102. Диск масою m = 2 кг котиться без ковзання по горизонтальній площині з швидкістю V=4 м/с. Знайти кінетичну енергію W диска.

1.103. Куля діаметром D = 6 см і масою m = 0,25 кг, що котиться, без ковзання, по горизонтальній площині з частотою обертання n = 4 об/с. Знайти кінетичну енергію W кулі.

1.104. На невагомому стержні довжиною S=30 см закріплені два однакових вантажі: один - в середині стержня, іншій - на одному з його кінців. Стержень з вантажами коливається біля горизонтальної осі, що проходить через вільний кінець стержня. Визначити зведену довжину L і період T гармонічних коливань цього фізичного маятника.

1.105. Точка здійснює прості гармонічні коливання, рівняння яких X = A sin(ωt), де A = 5 см, ω = 2 с$^{-1}$. В момент часу, коли точка володіла потенціальною енергією П = 0,1 мДж, на неї діяла сила рівна F = 5 мН. Знайти цей момент часу t.

1.106. Визначити частоту простих гармонічних коливань диска радіусом R=20 см навколо горизонтальної осі, що проходить через середину радіуса диска перпендикулярно його площині.

1.107. Визначити період гармонічних коливань диска радіусом R= 40 см навколо горизонтальної осі, що проходить через твірну диска.

1.108. Визначити період коливань математичного маятника, якщо його модуль максимального переміщення Δr = 18 см і максимальна швидкість V_{max} = 16 см/с.

1.109. Матеріальна точка здійснює прості гармонічні коливання так, що в початковий момент часу зміщення X_0 = 4 см, а швидкість V_0 = 10 см/с. Визначити амплітуду А і початкову фазу φ коливань, при умові, що їхній період T = 2 с.

1.110. Точка здійснює гармонічні коливання. У деякий момент часу зміщення точки дорівнює X=5 см, а швидкість V=20 см/с, прискорення а = - 80 см/с^2. Знайти циклічну частоту, період та амплітуду коливань в момент часу, що розглядається.

1.111. Точка здійснює гармонічні коливання, рівняння яких має вигляд $x = A\sin\omega t$, де А = 5 см, ω = 2 с$^{-1}$. Знайти момент часу (найближчий до початку відліку), у який потенціальна енергія точки дорівнює П = 10^{-4} Дж, а зворотна сила F = +5 10^{-3} Н.

1.112. Два гармонічних коливання, направлені по одній прямій, що мають однакові амплітуди і періоди, складаються в одне коливання тієї ж амплітуди. Знайти різницю фаз коливань, що складаються.

1.113. Точка здійснює одночасно два гармонічних коливання, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямах і що виражаються рівняннями $x = A_1\cos(\omega_1 t)$ та $y = A_2\cos\omega_2(t+\tau)$, де A_1= 4 см, $\omega_1 = \omega_2 = \pi$ с$^{-1}$, A_2=8 см, τ= 1 с. Знайти рівняння траєкторії.

1.114. Поперечна хвиля розповсюджується вздовж пружного шнура з швидкістю V=15 м/с. Період коливань точок шнура T = 1,2 с. Визначити різницю фаз коливань двох точок, лежачих на промені і віддалених від джерела хвиль на відстанях X_1 = 20 м і X_2 = 30 м.

1.115. Складаються два коливання однакового напряму і однакового періоду: $X_1 = A_1 \sin\omega_1 t$ та $X_2 = A_2 \sin\omega_2(t+\tau)$, де $A_1 = A_2$ = 3 см, $\omega_1 = \omega_2 = \pi$ с$^{-1}$, τ = 0,5 с. Визначити амплітуду А і початкову фазу φ результуючого коливання.

1.116. На гладкому горизонтальному столі лежить шар масою М = 200 г, що прикріплений до горизонтально розташованої легкої пружини з жорсткістю k = 500 Н/м. У шар попадає куля масою m = 10 г, що летіла з швидкістю V = 300 м/с. Нехтуючи переміщенням шару під час удару, визначити амплітуду А і період його коливань.

1.117. Через який час від початку руху точка, що здійснює гармонічне коливання, зміститься від положення рівноваги на половину амплітуди? Період коливань T = 24 с, початкова фаза рівна нулю.

1.118. Амплітуда гармонічного коливання А = 5 см, період T = 4 с. Знайти максимальну швидкість і прискорення точки, що здійснює це коливання.

1.119. Рівняння коливання точки має вигляд $X = 2\sin(\pi/2t + \pi/4)$. Знайти період коливань T, максимальну швидкість V_{max}, максимальне прискорення a_{max} точки.

1.120. Період гармонічних коливань точки T = 2 с, амплітуда А = 50 мм, початкова фаза φ_0=0. Знайти швидкість точки в момент часу, коли її зміщення від положення рівноваги X = 25 мм.

1.121. До пружини підвішений вантаж масою m=10 кг. Знаючи, що пружина під впливом сили F=9,8 Н розтягується на ΔL=1,5 см, знайти період T вертикальних коливань вантажу.

1.122. До пружини підвішений вантаж. Максимальна кінетична енергія коливань вантажу W_{max} = 1 Дж. Амплітуда коливань А =5 см. Знайти жорсткість k пружини.

1.123. Мідна кулька, підвішена до пружини, здійснює вертикальні коливання. Як зміниться період її коливань, якщо до пружини підвісити замість мідної кульки алюмінієву такого ж радіуса?

1.124. Як зміниться період вертикальних коливань вантажу, що висить на двох однакових пружинах, якщо від послідовного з'єднання пружин перейти до паралельного їх з'єднання?

1.125. Рівняння незгасаючих коливань має вигляд $X=4\sin(600\pi t)$, см. Знайти зміщення X від положення рівноваги точки, що знаходиться на відстані L=75 см від джерела коливань, у момент часу t=0,01 с, після початку коливань. Швидкість поширення коливань V=300 м/с.

1.126. До пружини підвішена чашка з гирями. При цьому період їхніх вертикальних коливань складав T = 0,5 с. Після того як на чашку поклали додаткові гирі, період коливань став T = 0,6 с. На скільки подовжилася пружина від додавання цього додаткового вантажу?

1.127. Логарифмічний декремент загасання математичного маятника δ = 0,2. У скільки разів поменшає амплітуда коливань за одне повне коливання маятника?

1.128. Знайти логарифмічний декремент загасання математичного маятника, якщо за час t = 1 хв. амплітуда коливань поменшала в 2 рази. Довжина маятника L = 1 м.

1.129. Знайти різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок, віддалених від джерела коливань на відстань x_1=10 м і x_2=16 м. Період коливань T = 0,04 с; швидкість поширення хвилі V = 300 м/с.

1.130. Знайти зміщення X від положення рівноваги точки, що віддалена від джерела коливань на відстань $L = \lambda/12$, для моменту часу t = T/6. Амплітуда коливань A = 0,05 м.

1.131. Кулька спливає з постійною швидкістю V в рідині, густина якої в 4 рази більша густини матеріалу кульки. У скільки разів сила тертя $F_{тр}$, що діє на спливаючу кульку, більша її сили ваги mg?

1.132. Якої найбільшої швидкості може досягнути дощова крапля діаметром d =0,3 мм, якщо динамічна в'язкість повітря η=1,2 10^{-3} Па с?

1.133. Стальна кулька діаметром d = l мм падає з постійною швидкістю V = 0,185 см/с у великій посудині, що наповнена касторовою олією. Знайти динамічну в'язкість η касторової олії.

1.134. Суміш свинцевих кульок діаметрами d_1=3 мм та d_2=1 мм опустили в бак з гліцерином висотою h=1 м. На скільки пізніше впадуть на дно кульки меншого діаметра у порівнянні з кульками більшого діаметра? Динамічна в'язкість гліцерину η=1,47 Пас.

1.135. Коркова кулька радіусом R=5 мм спливає у посудині, наповненій касторовою олією. Знайти динамічну і кінематичну в'язкості олії, якщо кулька спливає з постійною швидкістю V=3,5 см/с.

1.136. Циліндричний бак висотою h = 1 м наповнений до країв водою. За який час уся вода виллється через отвір, розташований у дні бака, якщо площа S_2 поперечного перетину отвору в 400 разів менша площі S_1 поперечного перетину бака?

1.137. У посудину ллється вода, причому за одиницю часу наливається об'єм води V = 0,2 л/с. Яким повинен бути діаметр отвору в дні посудини, щоб вода в ньому трималася на постійному рівні h = 8,3 см? **1.138.** Який тиск створює компресор, якщо струмінь рідкої фарби витікає з нього з швидкістю V=25 м/с? Густина фарби γ = 0,8 10^3 кг/м^3.

1.139. Крижина з площею поперечного перетину S = 1 м^2 і висотою h = 0,4 м плаває у воді. Яку роботу A треба здійснити, щоб повністю занурити крижину у воду?

1.140. Під дією сили 196 Н малий поршень гідравлічного преса, опускається на 25 см. Яку силу (у кН) забезпечує великий поршень, якщо він піднімається на 5 мм?

1.141. Порожню металеву кулю зважують у повітрі й у воді. Показання динамометра рівні 8 і 6 Н, відповідно. Визначити обсяг внутрішньої порожнини у кулі (у см^3). Густина металу 8 10^3 кг/м^3.

1.142. Однорідну кулю підвісили на пружині й опустили у воду, внаслідок чого подовження пружини зменшилося у 3 рази. Визначати густину матеріалу кулі.

1.143. Крижина плаває у воді. Об'єм її підводної частини 1800 м^3. Який об'єм надводної частини крижини? Густина льоду 900 кг/м^3.

1.144. З отвору у дні циліндричної посудини зі швидкістю 10 м/с б'є струмінь води. Визначити масу води в посудині, якщо радіус її основи 2 м. Силами тертя і товщиною стінок посудин зневажити

1.145. При якій відносній швидкості руху, релятивістське скорочення довжини тіла становить 25 % ?

1.146. Яку швидкість повинно мати рухоме тіло, щоб його розміри поменшали у 2 рази?

1.147. Мезон, що входить до складу космічних променів, рухається з швидкістю, що становить 95 % швидкості світла. Який проміжок часу по годиннику нерухомого спостерігача відповідає одній секунді "власного часу" мезона?

1.148. На скільки збільшиться маса α - частинки при її прискоренні від початкової швидкості, рівної нулю, до швидкості рівної 0,9 швидкості світла?

1.149. При якій швидкості маса електрона вдвічі більша його маси спокою?

1.150. До якої енергії можна прискорити електрони в циклотроні, якщо відносне збільшення їх маси не повинно перевищувати 5%?

1.151. Яку різницю потенціалів U повинен пройти електрон, щоб його швидкість становила 95% швидкості світла?

1.152. Яку прискорюючу різницю потенціалів U повинен пройти протон, щоб його розміри стали менші в 2 рази?

1.153. Знайти швидкість π-мезона, якщо його повна енергія в 10 разів більше енергії спокою.

1.154. Синхрофазотрон дає пучок протонів з кінетичною енергією W=10 ГэВ. Яку частку швидкості світла складає швидкість протонів в цих пучок?

1.155. Циклотрон дає пучок електронів з кінетичною енергією W=0,67 МэВ. Яку частку швидкості світла складає швидкість електронів в цьому пучку?

1.156. Маса електрона, що рухається з біля світловою швидкістю, вдвічі більше його маси спокою. Знайти його кінетичну енергію.

1.157. Сонце випромінює потік енергії Ф=3,9 10^{26} Вт. За який час маса Сонця поменшає в 2 рази?

1.158. Якій зміні маси відповідає зміна енергії на ΔW=4,19 Дж?

1.159. Знайти зміну енергії, що відповідає зміні маси на $\Delta m = m_e$.

1.160. При поділу ядра урану звільняється енергія W=200 МеВ. Знайти зміну маси Δm при поділу 1 моля урану.

4. Приклади розв'язування задач з контрольної роботи № 1.

Приклад 1.1. Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі X має вигляд: $X=A+Bt+Ct^3$, де A=2 м; B=1 м/с; C= -0,5 м/с^3. Знайти координату, швидкість і прискорення матеріальної точки в момент часу t=2 с.

Розв'язання. Координату X знайдемо підставивши в рівняння руху точки числові значення коефіцієнтів A, B, C і часу t. Звідки маємо:

$$X = 2 + 1\ 2 - 0{,}5\ 2^3 = 0;$$

Миттєва швидкість дорівнює першій похідній від координати за часом. Тоді для t = 2 с, маємо:

$$V = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = -5\ м/с\ ;$$

Прискорення точки знайдемо, взявши першу похідну від швидкості за часом. Тоді для t = 2 с, маємо:

$$a = \frac{dV}{dt} = 6Ct = -6\ м/с^2\ ;$$

Приклад 1.2. Тіло обертається навколо нерухомої осі згідно з законом: $\varphi = A+Bt+Ct^2$, де A=10 рад.; B = 20 рад/с; C = -2 рад/с^2. Знайти повне прискорення точки, що знаходиться на відстані R = 0,1 м від осі обертання, у момент часу t = 4 с.

Розв'язання. Повне прискорення матеріальної точки, що рухається по кривій лінії, може бути знайдене як геометрична сума тангенціального прискорення направленого по дотичній до траєкторії і нормального прискорення, направленого до центра кривизни траєкторії.

Оскільки вектори a_τ та a_n взаємно перпендикулярні, то модуль повного прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ ; \qquad (1.1)$$

Модулі тангенціального і нормального прискорення точки тіла, що обертається дорівнюють:

$$a_\tau = \varepsilon r\ ; \quad a_n = \omega^2 r\ ;$$

де ω - кутова швидкість тіла; ε - його кутове прискорення.

Підставляючи вирази для a_τ и a_n у формулу (1.1), знаходимо:

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ ; \qquad (1.2)$$

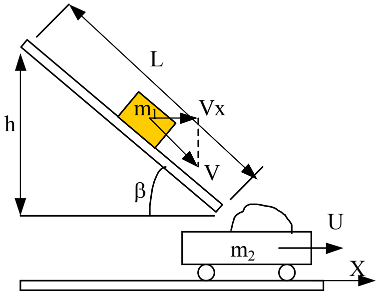

Рис. 1.3.

Кутову швидкість знайдемо взявши першу похідну від кута повороту за часом. Тоді при t = 4 с модуль кутової швидкості дорівнює:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct = $$
$$= [20 + 2(-2)4]\ рад/с = 4\ рад/с.$$

Кутове прискорення знайдемо, взявши першу похідну від кутової швидкості за часом:

$$\varepsilon = d\omega/dt = 2C = -4\ рад/с^2$$

Підставляючи значення ω, r, ε у формулу (2), отримуємо:

$$a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1{,}65\ м/с^2$$

Приклад 1.3. Ящик масою m_1=20 кг зісковзнув по ідеально гладкому лотку довжиною L=2 м на нерухомий возик з піском і застряв в ньому. Возик з піском масою m_2 =80 кг може без тертя переміщатися по рейках в горизонтальному напрямі. Визначити швидкість U возика з ящиком, якщо лоток нахилений під кутом β=30° до рейок (див. рис. 1.3).

Розв'язання. Возик і ящик можна розглядати як систему двох не пружно взаємодіючих тіл. Тому застосовуючи закон збереження імпульсу до системи ящик-возик маємо:

$$Px_1 + Px_2 = P^1x_1 + P^1x_2 \,; \qquad (1.3)$$

де Px_1, Px_2 - проекції на вісь X імпульсів ящика і возика в момент до падіння ящика на возик; P^1x_1, P^1x_2 - ті ж параметри після падіння ящика на возик.

Розглядаючи тіла системи як матеріальні точки, виразимо в рівнянні (1.3) імпульси тіл через їх маси і швидкості, враховуючи, що: $Px_2 = 0$ (возик до взаємодії з ящиком покоївся); $P^1x_1 = 0$ (ящик після зіткнення теж покоїться). Після взаємодії обидва тіла системи рухаються з однією і тією ж швидкістю U. Тоді маємо:

$$m_1 V_x = (m_1 + m_2)\, U \,;$$

Або:

$$m_1 V \cos\beta = (m_1 + m_2)\, U \,;$$

Звідки:

$$U = m_1 V \cos\beta \,/\, (m_1 + m_2) \,; \qquad (1.4)$$

Модуль швидкості V визначимо із закону збереження енергії:

$$m_1 g h = \frac{m_1 V^2}{2} \;;$$

де $h = L \sin\beta$. Звідки:

$$V = \sqrt{2gL\sin\beta} \;;$$

Підставивши це значення швидкості у формулу (1.4), отримаємо:

$$U = \frac{m_1\sqrt{2gL\sin\beta}\cos\beta}{m_1 + m_2} = 0{,}2\sqrt{19{,}6}\cdot 0{,}867 = 0{,}767 \text{ м/с}$$

Приклад 1.4. На спокійній воді ставка носом до берега стоїть човен масою M і довжиною L. На кормі стоїть людина масою m. На яку відстань S віддалиться човен від берега, якщо людина перейде з корми на ніс човна? Силами тертя знехтувати.

Розв'язання. Систему людина-човен можна розглядати як замкнену. А виходячи з закону збереження імпульсу, внутрішні сили замкненої системи тіл не можуть змінити положення їх центра мас. Застосовуючи це правило до системи людина-човен, можна вважати, що при

переміщенні людини по човну центр маси системи не змінить свого положення, тобто залишиться на колишній відстані від берега.

Нехай центр маси системи людина-човен знаходиться на вертикалі, що проходить у початковий момент через точку C_1 (див. рис. 1.4), а після переміщення човна - через іншу її точку C_2. Оскільки ця вертикаль нерухома відносно берега, то шукане переміщення S човна відносно берега легко визначити по переміщенню центра мас човна O.

Як видно з рис. 1.4, в початковий момент точка O знаходиться на відстані a_1 ліворуч від вертикалі, а після переходу людини - на відстані a_2 праворуч від вертикалі. Отже, шукане переміщення човна дорівнює:

$$S = a_1 + a_2 \,; \qquad (1.5)$$

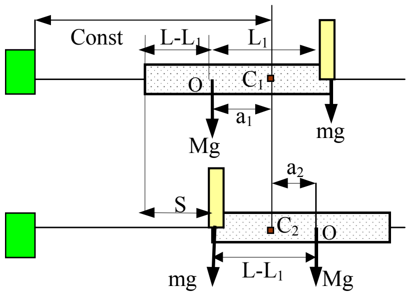

Рис. 1.4.

Для визначення параметрів a_1 і a_2 скористаємося тим, що сумарний момент сил, діючих на систему відносно горизонтальної осі, дорівнює нулю. Тому для початкового положення системи маємо:

$$Mg\, a_1 = mg\,(L_1 - a_1) \,;$$

$$a_1 = mL_1\,(M + m) \,;$$

А після переміщення човна:

$$Mg\, a_2 = mg(L - L_1 - a_2),$$

$$a_2 = m\,(L - L_1) \,/\, (M+m) \,;$$

Підставивши отримані вирази a_1 і a_2 у формулу (1.5), знайдемо:

$$S = \frac{m}{M+m}L_1 + \frac{m}{M+m}(L - L_1) = \frac{m}{M+m}L \;;$$

Приклад 1.5. При пострілі з пружинного пістолета вертикально вгору, куля масою m=20 г піднялася на висоту h=5 м. Визначити жорсткість k пружини пістолета, якщо вона була стиснута на x = 10 см. Масою пружини і силами тертя знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо систему пружина-куля. На тіла системи діють тільки консервативні сили, то ж для розв'язання задачі можливо застосувати закон збереження енергії. Значить повна механічна енергія E_1 системи у початковому стані (перед пострілом) дорівнює по... енергії E_2 у кінцевому стані (куля піднялася на висоту h).

$$T_1 + П_1 = T_2 + П_2 \,; \qquad (1.6)$$

де $T_1, П_1, T_2, П_2$ - кінетичні і потенціальні енергії системи в початковому і кінцевому станах.

Оскільки кінетичні енергії кулі в початковому і кінцевому станах рівні нулю, то рівняння (1.6) прийме вигляд:

$$П_1 = П_2 ; \tag{1.7}$$

Потенціальна енергія кулі у полі сил тяжіння Землі, коли вона покоїться на стислій пружині, рівна нулю. Висоту підйому кулі будемо відлічувати від торця стислої пружини. Тоді енергія системи в початковому стані буде рівна потенціальній енергії стислої пружини, тобто $П_1 = {}^1/_2\, kx^2$ а в кінцевому стані - потенціальній енергії кулі на висоті h, тобто $П_2=mgh$.

Підставивши ці вирази у формулу (1.7), знайдемо:

$$k = 2mgh / x^2 = 196 \text{ Н/м} ;$$

<u>Приклад 1.6.</u> Шар масою m_1, що рухався горизонтально з деякою швидкістю V_1, зіткнувся з нерухомим шаром масою m_2. Шари абсолютно пружні, удар прямий, центральний. Яку частку ε своєї кінетичної енергії перший шар передав другому?

<u>Розв'язання.</u> Частка енергії, що передана першим шаром другому, дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 U_2^2}{m_1 V_1^2} ; \tag{1.8}$$

де V_1, T_1 - швидкість і кінетична енергія першого шару до удару; U_2, T_2 - швидкість і кінетична енергія другого шару після удару.

Як видно з формули (1.8), для визначення ε треба знайти U_2.

Згідно з умовою задачі, імпульс системи двох куль відносно горизонтального напряму не змінюється і механічна енергія куль в інші види не переходить. Користуючись цим, маємо:

$$m_1 V_1 = m_1 U_1 + m_2 U_2 ; \tag{1.9}$$

$$\frac{m_2 V_1^2}{2} = \frac{m_2 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2} ; \tag{1.10}$$

Сумісне рішення цих рівнянь дає:

$$U_2 = \frac{2m_1 V_1}{m_1 + m_2} ;$$

Підставивши це значення U_2 в формулу (1.8) і скоротивши на V_1 і

m_1, отримаємо:

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2m_1 V_1}{V_1(m_1+m_2)}\right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} ;$$

<u>Приклад 1.7.</u> Через блок у вигляді суцільного диска, що має масу m=80 г перекинута тонка гнучка нитка, до кінців якої підвішені вантажі з масами m_1=100 г і m_2=200 г. Визначити прискорення, з яким будуть рухатися вантажі, якщо їх надати самим собі.

<u>Розв'язання.</u> Розглянемо сили, що діють на кожний вантаж і на блок у цілому (див. рис. 1.5). На кожний вантаж діють дві сили: сила ваги і сила натягу нитки. Направимо ось X вертикально вниз і напишемо для кожного вантажу рівняння руху в проекціях на цю вісь.

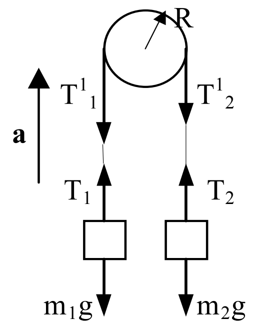

Рис. 1.5.

Для першого вантажу маємо:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a ; \tag{1.11}$$

Для другого вантажу маємо:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a ; \tag{1.12}$$

Під дією моментів сил T^1_1 і T^1_2 блок придбає кутове прискорення ε. З основного рівняння динаміки обертального руху маємо:

$$(T^1_2 - T^1_1)\, R = J_z\, \varepsilon ; \tag{1.13}$$

де $\varepsilon = a/R$; $J_z = 1/2\, mR^2$.

Згідно з III законом Ньютона: $T^1_2=T_2$ і $T^1_1=T_1$. Підставивши у рівняння (1.13) значення сил T_1 і T_2, з рівнянь (1.11-1.12), маємо:

$$(m_2 g - m_2 a)\, R - (m_1 g + m_1 a)\, R = mR^2 a / (2R) ;$$

Після скорочення на R і перегрупування членів знайдемо:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2}\, g = 2{,}88 \text{ м/с}^2 ;$$

<u>Приклад 1.8.</u> Маховик у вигляді суцільного диска радіусом R=0,2 м і масою m = 50 кг розкручений до частоти обертання n_1 = 480 хв$^{-1}$ надалі наданий сам собі. Під дією сил тертя маховик зупинився через t = 50 с. Знайти момент M сил тертя.

Розв’язання. Для розв’язання задачі скористаємося основним рівнянням динаміки обертального руху у такому вигляді:

$$\Delta L_z = M_z\,\Delta t\,; \qquad (1.14)$$

де ΔL_z - зміна проекції моменту імпульсу маховика на вісь Z за інтервал часу Δt; M_z - момент сил тертя, що діють на маховик.

При обертанні твердого тіла відносно нерухомої осі зміна проекції моменту імпульсу дорівнює:

$$\Delta L_z = J_z\,\Delta\omega\,;$$

де Jz - момент інерції маховика відносно осі Z; $\Delta\omega$ - зміна кутової швидкості маховика.

Момент інерції маховика у вигляді суцільного диска дорівнює:

$$J_z = {}^1/_2\, mR^2$$

Зміна кутової швидкості дорівнює:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi\,(n_2 - n_1)\,;$$

Підставивши в формулу (1.14) значення параметрів J_z і $\Delta\omega$ маємо:

$$M_z = \pi\, mR^2\,(n_2 - n_1) / \Delta t = -1 \text{ Нм}\,;$$

Приклад 1.9. Платформа у вигляді суцільного диска радіусом R=1,5 м і масою m_1 = 180 кг обертається біля вертикальної осі з частотою n = 10 хв$^{-1}$. У центрі платформи стоїть людина масою m_2 = 60 кг. Яку лінійну швидкість V відносно підлоги буде мати людина, якщо вона перейде на край платформи?

Розв’язання. Згідно з умовою задачі, момент зовнішніх сил відносно осі обертання Z можна вважати рівним нулю. Тоді проекція моменту імпульсу L_z системи платформа-людина теж є постійною:

$$L_z = J_z\,\omega = \text{const}\,; \qquad (1.15)$$

де J_z - момент інерції платформи з людиною відносно осі Z; ω - кутова швидкість платформи.

Момент інерції системи дорівнює сумі моментів інерції тіл, що входять до складу цієї системи, тому в початковий момент часу маємо: $J_z = J_1 + J_2$, а у кінцевий - $J_z' = J_1' + J_2'$. З урахуванням цього рівняння (1.15) прийме вигляд:

$$(J_1 + J_2)\,\omega = (J_1' + J_2')\,\omega'\,; \qquad (1.16)$$

де J_1, J_2, J_1', J_2' - значення моментів інерції платформи і людини відповідно у початковий та кінцевий моменти часу.

Момент інерції платформи відносно осі Z за умови переходу людини не змінюється і дорівнює: $J_1 = J_1' = {}^1/_2\, m_1R^2$. Момент інерції людини відносно тієї ж осі обертання буде змінюватися. Якщо розглядати людину як матеріальну точку, то її момент інерції J_2 у центрі платформи можна вважати рівним нулю. На краю платформи момент інерції людини буде дорівнювати $J_2' = m_2R^2$.

Підставимо в формулу (1.16) значення цих моментів інерції та початкової кутової швидкості платформи з людиною ($\omega = 2\pi$ n) і кінцевої кутової швидкості (ω' = V/R) та отримаємо:

$$({}^1/_2\, m_1 R^2 + 0)\, 2n = ({}^1/_2\, m_1 R^2 + m_2 R^2)\, V/R\,;$$

Після скорочення на R^2 та очевидних перетворень, з вище приведеного рівняння, знаходимо:

$$V = 2\pi n\, R\, m_1 / (m_1 + 2m_2) = 1 \text{ м/с}.$$

Приклад 1.10. Ракета встановлена на поверхні Землі для запуску у вертикальному напрямку. При якій мінімальній швидкості V, наданій ракеті при запуску, вона віддалиться від поверхні на відстань, рівну радіусу Землі (R =6,37 10^6 м)?

Рішення. З закону збереження енергії маємо:

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2\,; \qquad (1.17)$$

де T_1, Π_1, T_2, Π_2 - кінетичні і потенціальні енергії ракети на поверхні Землі та на відстані, що дорівнює радіусу Землі.

Згідно з визначення кінетичної енергії, маємо: $T_1 = {}^1/_2\, m\, V^2$.

Потенціальна енергія ракети на поверхні Землі дорівнює:

$$\Pi_1 = -G\, mM / R$$

При віддаленні ракети від поверхні Землі її потенціальна енергія зростає, а кінетична - зменшується. У кінцевому стані кінетична енергія ракети T_2 стане рівною нулю, а потенціальна досягне значення:

$$\Pi_2 = -G\, mM / 2R\,;$$

Підставляючи вирази для T_1, Π_1, T_2, Π_2 у рівняння (1.17), маємо:

$${}^1/_2\, m\, V^2 - G\, mM / R = -G\, mM / 2R\,;$$

Звідки неважко отримати:

$$V = \sqrt{GM/R}\,; \qquad (1.18)$$

Врахувавши, що $GM/R^2 = g$ (g - прискорення вільного падіння на поверхні Землі), формулу (1.18) перетворимо до такого вигляду:

$$V = \sqrt{gR} = 7{,}9\ 10^3 \text{ м/с}.$$

5. Таблиця варіантів контрольної роботи № 2.

Варіанти роботи	Номери завдань					
	1	2	3	4	5	6
1	2.1	2.31	2.49	2.64	2.89	2.116
2	2.2	2.32	2.50	2.65	2.90	2.117
3	2.3	2.33	2.51	2.66	2.91	2.118
4	2.4	2.34	2.52	2.67	2.92	2.119
5	2.5	2.35	2.53	2.68	2.93	2.120
6	2.6	2.36	2.54	2.69	2.94	2.121
7	2.7	2.37	2.55	2.70	2.95	2.122
8	2.8	2.38	2.56	2.71	2.96	2.123
9	2.9	2.39	2.57	2.72	2.97	2.124
10	2.10	2.40	2.58	2.73	2.98	2.116
11	2.11	2.41	2.59	2.74	2.99	2.117
12	2.12	2.42	2.60	2.75	2.100	2.118
13	2.13	2.43	2.61	2.76	2.101	2.119
14	2.14	2.44	2.62	2.77	2.102	2.120
15	2.15	2.45	2.63	2.78	2.103	2.121
16	2.16	2.46	2.49	2.79	2.104	2.122
17	2.17	2.47	2.50	2.80	2.105	2.123
18	2.18	2.48	2.51	2.81	2.106	2.124
19	2.19	2.31	2.52	2.82	2.107	2.125
20	2.20	2.32	2.53	2.83	2.108	2.126
21	2.21	2.33	2.54	2.84	2.109	2.127
22	2.22	2.34	2.55	2.85	2.110	2.128
23	2.23	2.35	2.56	2.86	2.111	2.129
24	2.24	2.36	2.57	2.87	2.112	2.130
25	2.25	2.37	2.58	2.64	2.113	2.131
26	2.26	2.38	2.59	2.65	2.114	2.132
27	2.27	2.39	2.60	2.66	2.115	2.133
28	2.28	2.40	2.61	2.67	2.114	2.134
29	2.29	2.41	2.62	2.68	2.113	2.135
30	2.30	2.42	2.63	2.69	2.112	2.136

6. Завдання контрольної роботи № 2.

2.1. Визначити кількість речовини ν і число N молекул кисню масою m = 0,5 кг.

2.2. Вода при температурі t = 4° C займає об'єм V=1 см^3. Визначити кількість речовини ν і число N молекул води.

2.3. Визначити концентрацію молекул кисню, що знаходиться в посудині місткістю V=2 л. Кількість кисню дорівнює ν=0,2 моля.

2.4. Визначити кількість речовини водню, що заповнює посудину об'ємом V=3 л, якщо концентрація молекул газу в ній n=2 10^{18} м$^{-3}$.

2.5. У балоні об'ємом V=3 л міститься кисень масою m=10 г. Визначити концентрацію n молекул газу.

2.6. У циліндр довжиною L=1,6 м, що заповнений повітрям при нормальному атмосферному тиску P_0, почали повільно всувати поршень з площею основи S=200 см^2. Визначити силу F, діючу на поршень, якщо його зупинити на відстані L_1=10 см від дна циліндра.

2.7. У балоні знаходиться газ при температурі T_1=400 К. До якої температури треба нагріти газ, щоб його тиск збільшився у 1,5 рази?

2.8. Балон місткістю 20 л заповнений азотом при температурі T = 400 К. Коли частину газу витратили, тиск в балоні знизився на ΔP =200 кПа. Визначити масу m витраченого газу. Процес ізотермічний.

2.9. У балоні місткістю V=15 л знаходиться аргон під тиском P_1 = 600 кПа і при температурі T_1 = 300 К. Коли з балона була взята деяка кількість газу, тиск в балоні знизився до P_2 = 400 кПа, а температура встановилася T_2= 260 К. Визначити масу m аргону, взятого з балону.

2.10. Дві посудини однакового об'єму містять кисень. У одній посудині тиск P_1=2 МПа і температура T_1=800 К, в іншій P_2=2,5 МПа, T_2=200 К. Посудини з'єднали трубкою і охолодили кисень до температури T = 200 К. Визначити встановлений у посудинах тиск P.

2.11. Обчислити густину азоту, що знаходиться в балоні під тиском P = 2 МПа і що має температуру T = 400 К.

2.12. Визначити молярну масу газу, якщо при температурі T = 154 К і тиску P = 2,8 МПа він має густину ρ = 6,1 кг/м^3.

2.13. Знайти густину ρ азоту при температурі T = 400 К і тиску P=2 МПа.

2.14. У посудині місткістю V=40 л знаходиться кисень при температурі T = 300 К. Коли частину газу ізотермічно витратили, тиск в балоні знизився на ΔP =100 кПа. Визначити масу витраченого кисню.

2.15. Визначити густину водяної пари, що знаходиться під тиском P = 2,5 кПа і має температуру T =250 К.

2.16. Визначити внутрішню енергію U водню, а також середню кінетичну енергію молекули цього газу при температурі T = 300 К, якщо кількість речовини цього газу дорівнює 0,5 моль.

2.17. Визначити сумарну кінетичну енергію $E_к$ поступального руху всіх молекул газу, що знаходяться в посудині місткістю V=3 л під тиском P = 540 кПа.

2.18. Кількість речовини гелію ν =1,5 моль, температура T = 120 К. Визначити сумарну кінетичну енергію $E_к$ поступального руху всіх молекул цього газу.

2.19. Молярна внутрішня енергія U_m деякого двоатомного газу дорівнює 6,02 кДж/моль. Визначити середню кінетичну енергію обертального руху однієї молекули цього газу. Газ вважати ідеальним.

2.20. Визначити середню квадратичну швидкість $V_{кв}$ молекули газу, взятого в посудину місткістю V = 2 л під тиском P = 200 кПа. Маса газу m = 0,3 г.

2.21. Пів моля водню знаходиться при температурі T = 300 К. Знайти середню кінетичну енергію обертального руху однієї молекули, а також сумарну кінетичну енергію $E_к$ усіх молекул цього газу.

2.22. При якій температурі середня кінетична енергія поступального руху молекули газу дорівнює 4,14 10^{-21} Дж?

2.23. Визначити молярну масу двоатомного газу і його питому теплоємність, якщо відомо, що різниця c_p - c_v питомих теплоємностей цього газу дорівнює 260 Дж/кг К.

2.24. Визначити показник адіабати ідеального газу, який при температурі T = 350 К і тиску P = 0,4 МПа займає об'єм V=300 л і має теплоємність Cv = 857 Дж/К.

2.25. У посудині місткістю V = 6 л знаходиться при нормальних умовах двоатомний газ. Визначити теплоємність Cv цього газу при постійному об'ємі.

2.26. Визначити молярну масу μ газу, якщо різниця його питомих теплоємностей c_P - c_V = 2,08 кДж/кг К.

2.27. Визначити молярну теплоємність газу, якщо його питома теплоємність c_V = 10,4 кДж/кг К і c_P = 14,6 кДж/кг К.

2.28. Обчислити питому теплоємність газу, знаючи, що його молярна маса μ=4 10^{-3} кг/моль і відношення теплоємкостей Cp/Cv = 1,67.

2.29. Трьохатомний газ під тиском P = 240 кПа і температурі t = 20° С займає об'єм V=10 л. Визначити теплоємність Cp цього газу при постійному тиску.

2.30. Одноатомний газ при нормальних умовах займає об'єм V = 5 л. Обчислити теплоємність Cv цього газу при постійному об'ємі.

2.31. Знайти середнє число зіткнень за час t = 1 с і довжину вільного пробігу молекули гелію, якщо газ знаходиться під тиском P = 2 кПа при температурі T = 200 К.

2.32. Визначити середню довжину вільного пробігу молекули азоту в посудині місткістю V=5 л. Маса газу m=0,5 г.

2.33. При нормальних умовах довжина вільного пробігу молекули водню дорівнює 0,160 мкм. Визначити діаметр молекули водню.

2.34. Кисень знаходиться під тиском P = 133 нПа при температурі T = 200 К. Обчислити середнє число зіткнень молекул кисню при цих умовах за одну секунду.

2.35. При якому тиску середня довжина вільного пробігу молекул азоту дорівнює 1 м, якщо температура газу t=10° С?

2.36. У посудині місткістю V = 5 л знаходиться водень масою m = 0,5 г. Визначити середню довжину вільного пробігу молекул водню.

2.37. Обчислити масу одного атома азоту.

2.38. Густина газу при тиску P = 96 кПа і температурі t = 0°С дорівнює 1,35 г/л. Найти молярну масу газу.

2.39. Визначити тиск газу, що містить N = 10^9 молекул і має об'єм V = 1 $см^3$, при температурах T_1 = 3 К і T_2 = 1000 К.

2.40. При температурі t =35°С і тиску P = 708 кПа густина газу становить ρ = 12,2 $кг/м^3$. Визначити відносну молекулярну масу газу.

2.41. Який об'єм V займає суміш азоту масою m_1 = 1 кг і гелію масою m_2 = 1 кг при нормальних умовах?

2.42. У балоні місткістю V = 15 л знаходиться суміш, що містить m_1 = 10 г водню, m_2 = 54 г водяної пари і m_3 = 60 г оксиду вуглецю. Температура суміші t = 27°С. Визначити тиск.

2.43. Знайти повну кінетичну енергію, а також кінетичну енергію обертального руху однієї молекули NH_3 при температурі $t = 27°C$.

2.44. Визначити питомі теплоємності c_v і c_p газоподібного оксиду вуглецю CO.

2.45. Суміш газу складається з кисню O_2 з масовою часткою $\omega_1 = 85$ % і озону O_3, з масовою часткою $\omega_2 = 15$ %. Визначити питомі теплоємності c_v і c_p цієї газової суміші.

2.46. Газова суміш складається з азоту масою $m_1 = 3$ кг і водяної пари масою $m_2 = 1$ кг. Приймаючи ці гази за ідеальні, визначити питомі теплоємності c_v і c_p газової суміші.

2.47. Молекула газу складається з двох атомів. Різниця питомих теплоємностей газу дорівнює: $c_P - c_V = 260$ Дж/кг К. Знайти молярну масу газу і ці теплоємності c_V і c_P.

2.48. Знайти середню довжину вільного пробігу молекули водню при $P = 133$ мПа та $t = - 173°$ C.

2.49. Водень займає об'єм $V = 10$ м^3 при тиску $P_1 = 0{,}1$ МПа. Його нагріли при постійному об'ємі до тиску $P_2 = 0{,}3$ МПа. Визначити зміну внутрішньої енергії газу, роботу, що виконана ним, і теплоту Q, яка була доведена до газу.

2.50. Кисень при незмінному тиску $P = 80$ кПа нагрівається. Його об'єм збільшується від $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 3$ м^3. Визначити зміну внутрішньої енергії кисню, роботу A, виконану ним при розширенні, а також теплоту Q, яка була доведена до газу.

2.51. У циліндрі під поршнем знаходиться азот, що має масу $m = 0{,}6$ кг і займає об'єм $V_1 = 1{,}2$ м^3, при температурі $T_1 = 560$ К. Внаслідок нагрівання газ розширився і зайняв об'єм $V_2 = 4{,}2$ м^3, причому температура залишилася незмінною. Знайти зміну внутрішньої енергії газу, виконану ним роботу A і теплоту Q, яка була доведена до газу.

2.52. У автомобільному двигуні міра адіабатного стиснення горючої суміші дорівнює 6,2. Суміш подається в циліндр при температурі $t_1 = 15°$ C. Знайти температуру t_2 горючої суміші в кінці такту стиснення. Горючу суміш розглядати як двоатомний ідеальний газ.

2.53. Газ здійснює цикл Карно. Температура при тепловіддачі в три рази вища за температуру теплоприймача. При тепловіддачі газу передано $Q_1 = 41{,}9$ кДж теплоти. Яку роботу здійснив газ?

2.54. Визначити кількість теплоти Q, яку треба передати кисню об'ємом $V = 50$ л при його ізохорному нагріванні, щоб тиск газу підвищився на $\Delta P = 0{,}5$ МПа.

2.55. При ізотермічному розширенні азоту при температурі $T = 280$ К об'єм його збільшився в два рази. Визначити: 1) виконану при розширенні газу роботу; 2) зміну внутрішньої енергії; 3) кількість теплоти Q, що була отримана газом. Маса азоту $m = 0{,}2$ кг.

2.56. При адіабатному стисненні тиск повітря був збільшений від 50 кПа до 0,5 МПа. Потім при незмінному об'ємі температура повітря була знижена до початкової. Визначити тиск P_3 газу в кінці процесу.

2.57. Кисень масою $m = 200$ г займає об'єм $V_1 = 100$ л і знаходиться під тиском $P_1 = 200$ кПа. При нагріванні газ розширився при постійному тиску до об'єму $V_2 = 300$ л, а потім його тиск зріс до $P_3 = 500$ кПа при незмінному об'ємі. Знайти зміну внутрішньої енергії газу, виконану газом роботу A і теплоту Q, що передана газу.

2.58. Об'єм водню при ізотермічному розширенні, за температури $T = 300$ К, збільшився у три рази. Визначити роботу виконану газом і теплоту Q, отриману ним при цьому. Маса m водню дорівнює 200 г.

2.59. Азот масою $m=0{,}1$ кг був нагрітий від температури $T_1 = 200$ К до температури $T_2 = 400$ К при ізобарному процесі. Визначити роботу виконану газом, отриману ним теплоту Q і зміну внутрішньої енергії.

2.60. У скільки разів збільшиться об'єм 0,4 моля водню при ізотермічному розширенні, якщо при цьому газ отримає кількість теплоти $Q = 800$ Дж? Температура водню $T = 300$ К.

2.61. Яка робота виконується при ізотермічному розширенні водню масою $m=5$ г, взятого при температурі $T = 290$ К, якщо об'єм газу збільшується у три рази?

2.62. Яка частка кількості теплоти Q, що підводиться до двоатомного ідеального газу при ізобарному процесі, витрачається на збільшення внутрішньої енергії газу і яка частка на роботу розширення.

2.63. Визначити роботу A, яку здійснить азот, якщо йому при постійному тиску надати кількість теплоти $Q=21$ кДж. Знайти також зміну внутрішньої енергії газу.

2.64. Ідеальний газ здійснює цикл Карно при температурах теплоприймача $T_2 = 290$ К і тепловіддавача $T_1 = 400$ К. У скільки разів збільшиться к.к.д. циклу, якщо температура тепловіддавача зросте до T_1=600 К?

2.65. Ідеальний газ здійснює цикл Карно. Температура T_1 тепловіддавача у чотири рази більша температури теплоприймача. Яку частку кількості теплоти, отриманої за один цикл від тепловіддавача, газ віддасть теплоприймачу?

2.66. Визначити роботу A_2 ізотермічного стиснення газу, що здійснює цикл Карно, к.к.д. якого η=0,4 якщо робота ізотермічного розширення дорівнює $A_1 = 8$ Дж.

2.67. Газ, що здійснює цикл Карно, віддав теплоприймачу теплоту $Q_2 = 14$ кДж. Визначити температуру T_1 тепловіддавача, якщо при температурі теплоприймача $T_2 = 280$ К робота циклу складає A = 6 кДж.

2.68. Газ, будучи робочою речовиною у циклі Карно, отримав від тепловіддавача теплоту Q_1=4,38 кДж і здійснив роботу A = 2,4 кДж. Визначити температуру тепловіддавача, якщо температура теплоприймача $T_2 = 273$ К.

2.69. Газ, що здійснює цикл Карно, віддав теплоприймачу 67 % теплоти, отриманої від тепловіддавача. Визначити температуру T_2 теплоприймача, якщо температура тепловіддавача $T_1 = 430$ К.

2.70. У скільки разів збільшиться коефіцієнт корисної дії циклу Карно при підвищенні температури тепловіддавача від $T_1 = 380$ К до $T_1 = 560$ К? Температура теплоприймача $T_2 = 280$ К.

2.71. Ідеальна теплова машина працює по циклу Карно. Температура тепловіддавача $T_1 = 500$ К, температура теплоприймача T_2=250 К. Визначити термічний к.к.д. циклу, а також роботу A_1 робочої речовини при ізотермічному розширенні, якщо при ізотермічному стисненні звершена робота $A_2 = 70$ Дж.

2.72. Газ, що здійснює цикл Карно, отримує теплоту $Q_1 = 84$ кДж. Визначити роботу газу, якщо температура T_1 тепловіддавача у три рази вища за температуру T_2 теплоприймача.

2.73. У циклі Карно газ отримав від тепловіддавача теплоту $Q_1 = 500$ Дж і здійснив роботу A = 100 Дж. Температура тепловіддавача $T_1 = 400$ К. Визначити температуру T_2 теплоприймача.

2.74. При ізотермічному (t = 23° C) розширенні азоту масою m = 10,5 г його тиск змінюється від $P_1 = 250$ кПа до $P_2 = 100$ кПа. Знайти роботу виконану газом при розширенні.

2.75. При ізотермічному розширенні 10 г азоту, що знаходиться при температурі t=17° C, була виконана робота A = 860 Дж. У скільки разів змінився тиск азоту при розширенні?

2.76. Робота ізотермічного розширення 10 г деякого газу від об'єму V_1 до $V_2 = 2V_1$ виявилася рівною A = 575 Дж. Знайти середню квадратичну швидкість молекул газу при цій температурі.

2.77. Гелій, що знаходиться при нормальних умовах, ізотермічно розширяється від об'єму $V_1 = 1$ л до об'єму $V_2 = 2$ л. Знайти роботу виконану при цьому газом і кількість теплоти Q, що була надана газу.

2.78. При ізотермічному розширенні газу, що займав об'єм V=2 м^3, тиск його міняється від $P_1 = 0{,}5$ МПа до $P_2 = 0{,}4$ МПа. Знайти роботу виконану при цьому.

2.79. До якої температури охолодиться повітря, що знаходиться при t = 0° C, якщо воно розширяється за законом адіабати від об'єму V_1 до об'єму $V_2 = 2V_1$?

2.80. Об'єм $V_1 = 7{,}5$ л кисню адіабатичним чином стискується до об'єму $V_2 = 1$ л, причому у кінці стиснення встановився тиск $P_2 = 1{,}6$ МПа. Під яким тиском P_1 знаходився газ до стиснення?

2.81. За умови адіабатичного стиснення повітря в циліндрах двигуна внутрішнього згорання тиск змінюється від $P_1 = 0{,}1$ МПа до $P_2 = 3{,}5$ МПа. Початкова температура повітря $t_0 = 40$°C. Знайти температуру t повітря у кінці стиснення.

2.82. Газ розширяється за законом адіабати, причому об'єм його збільшується вдвічі, а термодинамічна температура падає у 1,32 рази. Яке число ступенів свободи мають молекули цього газу?

2.83. Двоатомний газ, що знаходиться під тиском $P_0 = 2$ МПа, з температурою $t_0 = 27$°C, стискується за законом адіабати від об'єму V_0 до $V_1 = 0{,}5V_0$. Знайти температуру t_1 і тиск P_1 газу після стиснення.

2.84. У посудині під поршнем знаходиться гримучий газ, що займає при нормальних умовах об'єм V = 0,1 л. При швидкому стисненні газ запалюється. Знайти температуру T запалення гримучого газу, якщо відомо, що робота стиснення A = 46,35 Дж.

2.85. У посудині під поршнем знаходиться газ при нормальних умовах. Відстань між дном посудини і дном поршня h=25 см. Коли на поршень поклали вантаж масою m=20 кг, поршень опустився на Δh=13,4 см. Вважаючи стиснення адіабатичним, знайти для даного газу відношення c_P/c_V. Площа поперечного перетину поршня S=10 $см^2$.

2.86. Двоатомний газ займає об'єм V = 0,5 л при тиску P = 50 кПа. Газ стискується адіабатичним способом до деякого об'єму V_2 та тиску P_2. Потім він охолоджується при V_2 = const до початкової температури, причому його тиск стає рівним P_1 = 100 кПа. Знайти об'єм V_2 і тиск P_2.

2.87. Газ розширяється за законом адіабати так, що його тиск падає від P_0 = 200 кПа до P_1 = 100 кПа. Потім він нагрівається при постійному об'ємі до початкової температури, причому його тиск стає рівним P=122 кПа. Знайти відношення c_p/c_v. для цього газу.

2.88. Яку енергію треба затратити, щоб видути мильний пузир діаметром d=12 см? Яким буде додатковий тиск всередині цього пузиря?

2.89. На нижньому кінці трубки діаметром d = 0,2 см, висить сферична крапля води. Знайти діаметр цієї краплі.

2.90. Гас витікає з вертикальної трубки діаметром 1,8 мм. Скільки крапель вийде з 1 грама гасу, якщо коефіцієнт поверхневого натягу гасу 24 10^{-3} Н/м, g = 10 $м/с^2$?

2.91. У капілярній трубці радіусом 0,5 мм рідина піднялася на висоту 11 мм. Визначити густину цієї рідини, якщо її коефіцієнт поверхневого натягу σ = 0,022 Н/м, g = 10 $м/с^2$.

2.92. Визначить різницю рівнів спирту в двох сполучених капілярах діаметрами 0,5 і 3 мм? Коефіцієнт поверхневого натягу спирту σ = 0,021 Н/м, густина ρ =800 $кг/м^3$, g =10 $м/с^2$.

2.93. Знайти масу води, що ввійшла в скляну трубку з діаметром каналу d=0,8 мм, яка опущена у воду на малу глибину. Вважати змочування повним.

2.94. Яку роботу треба здійснити при ізотермічному видуванні мильної бульбашки, щоб збільшити його об'єм від 8 $см^3$ до V_2=16 $см^3$?

2.95. У закритій судині об'ємом V=0,5 $м^3$ знаходиться ν=0,6 кмоль вуглекислого газу при тиску P = 3 МПа. Користуючись рівнянням Ван-дер-Ваальса знайти, у скільки разів треба збільшити температуру газу, щоб тиск збільшився вдвічі.

2.96. Яка енергія виділиться при злитті двох крапель ртуті діаметром d_1 = 0,8 мм та d_2 = 1,2 мм в одну краплю?

2.97. Визначити тиск всередині повітряної бульбашки діаметром d=4 мм, що знаходиться у воді біля її поверхні.

2.98. Гліцерин піднявся в капілярній трубці діаметром каналу d=1 мм на висоту h = 20 мм. Визначити поверхневий натяг гліцерину. Вважати змочування повним.

2.99. У воду опущена на дуже малу глибину скляна трубка з діаметром каналу d= 1 мм. Визначити масу води, що ввійшла у трубку.

2.100. Знайти зміну ентропії при ізобарному розширенні 8 г гелію від об'єму V_1 = 10 л до об'єму V_2 = 25 л.

2.101. Повітряна бульбашка діаметром d=2,2 мкм знаходиться у воді біля її поверхні. Визначити густину повітря в бульбашці, якщо повітря над поверхнею води знаходиться при нормальних умовах.

2.102. На скільки градусів нагріється крапля ртуті, що з'явилась від злиття двох крапель радіусом R = 1 мм кожна?

2.103. Яку роботу треба здійснити, щоб розділити сферичну краплю ртуті радіусом R=3 мм на дві однакові краплі?

2.104. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба здійснити, щоб збільшити вдвічі об'єм мильної бульбашки радіусом R=1 см? Поверхневий натяг мильного розчину σ = 0,043 Н/м.

2.105. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба здійснити, щоб видути мильну бульбашку діаметром d = 4 см? Поверхневий натяг мильного розчину σ = 0,043 Н/м.

2.106. Знайти тиск повітря у повітряній бульбашці діаметром d = 0,01 мм, що знаходиться на глибині h = 20 см під поверхнею води. Атмосферний тиск P_o= 101,7 кПа.

2.107. Тиск повітря всередині мильної бульбашки на ΔP = 133,3 Па більше атмосферного. Знайти її діаметр. Поверхневий натяг мильного розчину σ = 0,043 Н/м.

2.108. Маса m = 10 г реального гелію займає об'єм V = 100 $см^3$ при тиску P = 100 МПа. Знайти температуру T газу.

2.109. Один кмоль вуглекислого газу знаходиться при температурі T=100°C. Знайти тиск газу, вважаючи його реальним. За[illegible] розв'язати для об'ємів $V_1 = 1$ м^3 і $V_2 = 0{,}05$ м^3.

2.110. Знайти зміну ентропії при переході 8 г кисню від об'єму 10 л при температурі t_1=80° C до об'єму 40 л при температурі t_2 =300° C.

2.111. Знайти зміну ентропії при переході 6 г водню від об'єму V_1 = 0 л під тиском P_1 =150 кПа до об'єму V_2=60 л під тиском P_2=100 кПа.

2.112. Маса m=6,6 г водню ізобарно розширяється від об'єму V_1 до об'єму V_2=2V_1. Знайти зміну ентропії при цьому розширенні.

2.113. На скільки тиск повітря всередині мильної бульбашки діаметром d = 5 мм більше нормального атмосферного тиску P_0 ?

2.114. Знайти зміну ентропії при ізотермічному розширенні 6 г водню від тиску P_1 = 100 кПа до тиску P_2 = 50 кПа.

2.115. Маса m = 10,5 г азоту ізотермічно розширяється від об'єму V_1 = 2 л до об'єму V_2 = 5 л. Знайти зміну ентропії при цьому процесі.

2.116. Використовуючи закон Дюлонга і Пті знайдіть з якої речовини зроблена металева куля масою 0,025 кг, якщо для її нагрівання від 10^0 C до 30^0 C була витрачена теплота у кількості 117 Дж.

2.117. З закону Дюлонга і Пті знайдіть у скільки разів питома теплоємність алюмінію більша питомої теплоємності платини.

2.118. Свинцева куля, що рухалась з швидкістю V = 400 м/с, поцілила у стінку. Враховуючи, що 10 % кінетичної енергії кулі пішло на її нагрівання, знайти на скільки градусів нагрілася куля. Питому теплоємність свинцю знайти використовуючи закон Дюлонга і Пті.

2.119. Пластинки з міді (товщиною d_1=9 мм) і заліза (товщиною d_2=3 мм) складені разом. Зовнішня поверхня мідної пластинки має температуру t_1 = 50°C, зовнішня поверхня залізної - t_2 = 0°C. Знайти температуру t поверхні їх зіткнення.

2.120. Зовнішня поверхня стіни має температуру t_1 = - 20°C, внутрішня температуру t_2 = 20°C. Товщина стіни d = 40 см. Знайти теплопровідність λ матеріалу стіни, якщо через одиницю її поверхні за одну години проходить кількість теплоти Q = 460,5 кДж/м^2.

2.121. Один кінець залізного стержня підтримується при температурі t_1 = 100°C, інший впирається в лід. Довжина стержня L = 14 см, площа поперечного перетину S = 2 см^2. Знайти кількість теплоти Q, що протікає в одиницю часу вздовж стержня. Яка маса m льоду розта[illegible] час t = 40 хв? Втратами тепла через стінки нехтувати.

2.122. Площа перетину мідного стержня S=10 см^2, довжина стержня L = 50 см. Різниця температур на кінцях стержня ΔT=15 K. Яка кількість теплоти Q проходить в одиницю часу через стержень?

2.123. Металева циліндрична посудина радіусом R = 9 см наповнена льодом при температурі t_1 = 0°C. Посудина теплоізольована шаром корки товщиною d = l см. Через скільки годин весь лід, що знаходиться в посудині, розтане? Температура зовнішнього повітря t_2 = 25°C? Вважати, що обмін тепла відбувається тільки через бокову поверхню посудини середнім радіусом r = 9,5 см.

2.124. До сталевого дроту радіусом 1 мм підвішений важок. Під дією цього важка дріт отримав таке ж подовження, як і при його нагрівання на 20^0C. Знайти масу важка.

2.125. Нагрітий до температури 150^0C, мідний дріт пружно розтягнутий між двома стінками. Визначить при якій температурі дріт, охолоджуючись, порветься.

2.126. При нагріванні деякого металу від t = 0^0C до t = 500^0C, його густина зменшилась у 1,027 разів. Знайти коефіцієнт лінійного розширення α цього металу.

2.127. На нагрів мідної болванки масою 1 кг, що мала температуру 0^0C, витрачено 138,2 кДж теплоти. У скільки разів збільшився об'єм болванки. Питому теплоємність міді знайти з закону Дюлонга і Пті.

2.128. Яку силу F треба прикласти до кінців стального стержня з площею поперечного перетину S = 10 см^2, щоб не дати йому розширитися при нагріванні від t_0 = 0°C до t = 30°C?

2.129. До стального дроту радіусом R=1 мм підвішений вантаж масою m=100 кг. На який найбільший кут можна відхилити дріт з вантажем, щоб він не розірвався при проходженні положення рівноваги?

2.130. До залізного дроту довжиною L = 50 см і діаметром d = 1 мм прив'язана гиря масою m =1 кг. З якою частотою можна обертати у вертикальній площині такий дріт з вантажем, щоб він не розірвався?

2.131. Однорідний мідний стержень довжиною L = 1 м рівномірно обертається навколо вертикальної осі, що проходить через один з його кінців. При якій частоті обертання стержень розірветься?

195

2.132. Однорідний стержень обертається навколо вертикальної осі, що проходить через його середину. Стержень розривається, коли швидкість його кінця досягає V=380 м/с. Найти межу міцності $\sigma_{пр}$ матеріалу стержня, якщо густина матеріалу стержня $\rho = 7{,}9\ 10^3$ кг/м^3.

2.133. До стального дроту довжиною L = 1 м і радіусом R = 1 мм підвісили вантаж масою m=100 кг. Знайти роботу розтягнення дроту.

2.134. Маємо гумовий шланг довжиною L = 50 см і внутрішнім діаметром d = 1 см. Шланг розтягли так, що його довжина стала на ΔL=10 см більше. Знайти внутрішній діаметр d_0 розтягнутого шланга, якщо коефіцієнт Пуассона для гуми $\nu = 0{,}5$.

2.135. Визначити максимальну довжину мідного дроту, що підвішений вертикально, при якій він не почне рватись під дією сили ваги.

2.136. Розв'язати попередню задачу для свинцевого дроту.

7. Приклади розв'язування задач з контрольної роботи № 2.

Приклад 2.1. Визначити молярну масу сірчаної кислоти.

Розв'язання. Хімічна формула сірчаної кислоти H_2S0_4. До складу молекули сірчаної кислоти входять атоми трьох елементів, тому її відносна молекулярна маса M буде складатися з трьох доданків:

$$M = n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3\ ; \qquad (2.1)$$

де A – атомні маси відповідних хімічних елементів; n – їх кількість у хімічній формулі.

З формули сірчаної кислоти маємо, що $n_1 = 2$ (два атоми водню), $n_2 = 1$ (один атом сірки) і $n_3 = 4$ (чотири атоми кисню).

Значення відносних атомних мас водню, сірки і кисню знайдемо в таблиці Менделєєва. Тоді:

$$A_1 = 1,\quad A_2 = 32,\quad A_3 = 16\ ;$$

Підставивши значення n_i і A_i у формулу (2.1), знайдемо відносну молекулярну масу сірчаної кислоти:

$$M = 2\ 1+1\ 32+4\ 16 = 98\ ;$$

Знаючи відносну молекулярну масу M, знайдемо молярну масу сірчаної кислоти по формулі

$$\mu = M\,k\ ; \qquad (2.2)$$

де $k = 10^{-3}$ кг/моль.

196 Підставивши в (2.2) значення M, одержимо $\mu = 98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Приклад 2.2. Визначити молярну масу μ суміші кисню масою m_1=25 г і азоту масою m_2=75 г.

Розв'язання. Молярна маса суміші μ є відношенням маси суміші до кількості речовини суміші ν:

$$\mu = m / \nu\ ; \qquad (2.3)$$

Маса суміші дорівнює сумі мас компонентів суміші: $m = m_1 + m_2$.

Кількість речовини суміші дорівнює:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\ ;$$

Підставивши цей вираз у формулу (2.3), одержимо:

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}}\ ; \qquad (2.4)$$

Тепер, використавши метод прикладу 1, знайдемо молярні маси кисню μ_1 і азоту μ_2:

$$\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}; \qquad \mu_2 = 28 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}.$$

Підставимо значення цих величин у (2.4) і зробимо обчислення:

$$\mu = \frac{25\cdot 10^{-3} + 75\cdot 10^{-3}}{25\cdot 10^{-3}/(32\cdot 10^{-3}) + 75\cdot 10^{-3}/(28\cdot 10^{-3})} = 28{,}9\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}$$

Приклад 2.3. Визначити число молекул, що містяться в об'ємі V=1 мм^3 води і масу однієї молекули. Вважаючи, що молекули води мають вид кульок, які стикаються одна з одною, знайти їх діаметр.

Розв'язання. Число молекул, що містяться в деякій системі масою m, дорівнює добутку постійної Авогадро N_A на кількість речовини ν:

$$N = \nu\, N_A\ ; \qquad (2.5)$$

Тому, що $\nu = m/\mu$, з формули (2.5) маємо: $N = (m/\mu)\, N_A$.

Виразивши масу як добуток густина на об'єм V, одержимо:

$$N = \rho V N_A / \mu\ ; \qquad (2.6)$$

Зробимо обчислення, з огляду на те, що $\mu = 18\ 10^{-3}$ кг/моль.

$$N = (10^3\ 10^{-9}\ 6{,}02\ 10^{23}) / 18\ 10^{-3} = 3{,}34\ 10^{19} \text{ шт.}$$

Масу m_1 однієї молекули можна знайти по формулі:

$$m_1 = \mu / N_A = 18\ 10^{-3} / 6{,}02\ 10^{23} = 2{,}99\ 10^{-26} \text{ кг.}$$

Якщо молекули води щільно прилягають одна до одної, то можна вважати, що на кожну молекулу приходиться об'єм (кубічна комірка) $V_1 = d^3$, де d - діаметр молекули. Звідси:

$$d = \sqrt[3]{V_1} \ ; \qquad (2.7)$$

Об'єм V_1 знайдемо, розділивши молярний об'єм V_μ на число молекул у молі, тобто на N_A:

$$V_1 = V_\mu / N_A ;$$

Підставимо V_1 у формулу (2.7), і врахувавши, що $V_\mu = \mu/\rho$, маємо:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho\ N_A}} \ ; \qquad (2.8)$$

Зробимо обчислення:

$$d = \sqrt[3]{\frac{18\cdot 10^{-3}}{10^3\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}} = 3{,}11\cdot 10^{-10} \ ; \text{ м.}$$

<u>Приклад 2.4.</u> У балоні об'ємом 10 л знаходиться гелій під тиском P_1 = 1 МПа і при температурі T_1=300 К. Після того як з балона було узято m=10 г гелію, температура в балоні понизилася до T_2 = 290 К. Визначити тиск P_2 гелію, що залишився в балоні.

<u>Розв'язання.</u> Для розв'язання задачі скористуємося рівнянням Клапейрона-Менделєєва, застосувавши його до кінцевого стану газу:

$$P_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2 \ ; \qquad (2.9)$$

де m_2 - маса гелію в балоні в кінцевому стані; μ - молярна маса гелію; R - універсальна газова стала.

З рівняння (2.9) виразимо шуканий тиск:

$$P_2 = m_2 R T_2 \ / (\mu V) \ ; \qquad (2.10)$$

Масу m_2 гелію виразимо через масу m_1, що відповідає початковому стану, і масу m гелію, узятого з балона. Тобто:

$$m_2 = m_1 - m \ ; \qquad (2.11)$$

Масу m_1 гелію знайдемо також з рівняння Клапейрона-

Менделєєва, застосувавши його до початкового стану:

$$m_1 = \mu P_1 V / (R T_1) \ ; \qquad (2.12)$$

Підставивши масу m_1 у (2.11), а потім масу m_2 у (2.10), маємо:

$$P_2 = \left(\frac{\mu P_1 V}{R T_1} - m\right)\frac{R T_2}{\mu V} \quad\Rightarrow\quad P_2 = \frac{P_1 T_2}{T_1} - \frac{m R T_2}{\mu V} \ ;$$

Зробимо обчислення по отриманій формулі, з огляду на те, що $\mu = 4\cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$P_2 = \left(\frac{290}{300}\cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{8{,}31}{10^{-2}}\cdot 290\right) = 3{,}64\cdot 10^5, \text{ Па}$$

<u>Приклад 2.5.</u> Балон містить m_1 = 80 г кисню і m_2 = 320 г аргону. Тиск суміші P = 1 МПа, температура T=300 К. Приймаючи дані гази за ідеальні, визначити об'єм V балона.

<u>Розв'язання.</u> За законом Дальтона, тиск суміші дорівнює сумі парціальних тисків газів, що входять до її складу. З рівняння Клапейрона-Менделєєва, парціальні тиски P_1 кисню і P_2 аргону дорівнюють:

$$P_1 = m_1 R T / (\mu_1 V) \ ; \qquad P_2 = m_2 R T / (\mu_2 V) \ ;$$

Отже, за законом Дальтона, тиск суміші газів дорівнює:

$$P = P_1 + P_2 \quad\Rightarrow\quad P = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V} \ ;$$

Звідкіля об'єм балона:

$$V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{P} \ ; \qquad (2.13)$$

Зробимо обчислення, з огляду на те, що $\mu_1 = 32\ 10^{-3}$ кг/моль, а $\mu_2 = 40\cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$V = \left(\frac{0{,}08}{32\cdot 10^{-3}} + \frac{0{,}32}{4\cdot 10^{-3}}\right)\frac{8{,}31\cdot 300}{10^6} = 0{,}0262 \ ; \text{ м}^3$$

<u>Приклад 2.6.</u> Знайти середню кінетичну енергію $\varepsilon_{об}$ обертального руху однієї молекули кисню при температурі T=350 К, а також кінетичну енергію $E_к$ обертального руху усіх молекул кисню масою m=4 г.

<u>Розв'язання.</u> На кожен ступінь свободи молекули газу приходиться однакова середня енергія $\varepsilon = {}^1/_2\, kT$. Обертальному руху двохатомної молекули (молекула кисню - двохатомна) відповідають дві ступені

свободи. Тому середня енергія обертального руху молекули кисню:

$$\varepsilon_{об} = 2\,{}^{1}/_{2}\,kT = kT; \qquad (2.14)$$

Кінетична енергія обертального руху усіх молекул газу:

$$E_к = \varepsilon_{об}\,N\,; \qquad (2.15)$$

Число всіх молекул газу кисню дорівнює:

$$N = N_A\,\nu\,;$$

де N_A - постійна Авогадро; ν - кількість речовини.

Якщо врахувати, що кількість речовини $\nu = m/\mu$, то формула (2.15) прийме вигляд:

$$E_к = N_A\ m\,\varepsilon_{об}\,/\,\mu\,; \qquad (2.16)$$

Зробимо обчислення (для кисню $\mu = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль) :

$$\varepsilon_{об} = kT = 1{,}38\ 10^{-23}\ 350 = 4{,}83\ 10^{-21}\ Дж$$

$$E_к = 6{,}02\ 10^{23}\ 4\ 10^{-3}\ 4{,}83\ 10^{-21}\ /\ 32\ 10^{-3} = 364\ Дж$$

Приклад 2.7. Обчислити питомі теплоємності при постійному об'ємі c_V і при постійному тиску c_P неону і водню, приймаючи ці гази за ідеальні.

Розв'язання. Питомі теплоємності ідеальних газів дорівнюють:

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}; \qquad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}; \qquad (2.17)$$

де i - число ступенів свободи молекули газу; μ - молярна маса.

Для неону (одноатомний газ) $i = 3$ і $\mu = 20\ 10^{-3}$ кг/моль. Тоді:

$$C_V = {}^{3}/_{2}\ 8{,}31\ /\ (20\ 10^{-3}) = 624\ Дж\ /\ (кг\ К)\ ;$$

$$C_P = {}^{5}/_{2}\ 8{,}31\ /\ (20\ 10^{-3}) = 1040\ Дж\ /\ (кг\ К)\ ;$$

Для водню (двоатомний газ) $i = 5$ і $\mu = 2\ 10^{-3}$ кг/моль. Тоді:

$$C_V = {}^{5}/_{2}\ 8{,}31\ /\ (2\ 10^{-3}) = 1{,}04\ 10^{4}\ Дж\ /\ (кг\ К)\ ;$$

$$C_P = {}^{7}/_{2}\ 8{,}31\ /\ (2\ 10^{-3}) = 1{,}46\ 10^{4}\ Дж\ /\ (кг\ К)\ ;$$

Приклад 2.8. Обчислити питомі теплоємності C_V і C_P суміші неону і водню, якщо їх масові частки складають $\omega_1 = 80\ \%$ і $\omega_2 = 20\ \%$.

Розв'язання. Питому теплоємність суміші при постійному об'ємі C_V знайдемо в такий спосіб. Теплоту, необхідну для нагрівання суміші на ΔT, визначимо двома способами:

$$Q = C_V\,(m_1 + m_2)\,\Delta T\,;$$

$$Q = (C_{V,1}\,m_1 + C_{V,2}\,m_2)\,\Delta T\,;$$

де $C_{V,1}$, $C_{V,2}$ - питомі теплоємність неону та водню.

Порівнявши праві частини вище приведених рівнянь і поділивши обидві частини отриманої рівності на ΔT, одержимо:

$$(C_{V,1}\,m_1 + C_{V,2}\,m_2) = C_V\,(m_1 + m_2)\,;$$

Звідси:

$$C_V = C_{V.1}\frac{m_1}{m_1+m_2} + C_{V.2}\frac{m_2}{m_1+m_2}\ ;$$

Або:

$$C_V = C_{V.1}\,\omega_1 + C_{V.2}\,\omega_2\ ;$$

Міркуючи аналогічно, одержимо формулу для обчислення питомої теплоємності суміші при постійному тиску:

$$C_P = C_{P,1}\,\omega_1 + C_{P,2}\,\omega_2\ ;$$

Зробимо обчислення, взявши значення питомих теплоємностей неону та водню з попереднього прикладу:

$$C_V = (\ 624\ 0{,}8 + 1{,}04\ 10^{4}\ 0{,}2\ ) = 2580\ Дж/(кг\cdot К)\ ;$$

$$C_P = (1040\ 0{,}8 + 1{,}46\cdot10^{4}\ 0{,}2) = 3750\ Дж/(кг\ К).$$

Приклад 2.9. Кисень масою $m = 2$ кг займає об'єм $V_1 = 1$ м^3 і знаходиться під тиском $P_1 = 0{,}2$ МПа. Газ був нагрітий спочатку при постійному тиску до об'єму $V_2 = 3$ м^3, а потім при постійному об'ємі до тиску $P_3 = 0{,}5$ МПа. Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії газу, виконану ним роботу A та теплоту Q, передану газу.

Розв'язання. По-перше побудуємо графік цього термодинамічного процесу. Зміна внутрішньої енергії газу дорівнює:

$$\Delta U = c_v\,m\,\Delta T = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}m\,\Delta T\ ; \qquad (2.18)$$

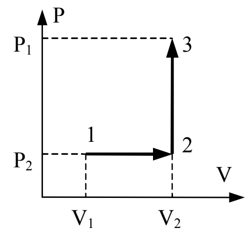

Рис. 2.1.

де i - число ступенів свободи молекул газу (для двоатомних молекул кисню $i = 5$); $\Delta T = T_3 - T_1$ - температура газу в кінцевому і початковому станах.

Температуру газу знайдемо з рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$T = PV\mu\,/\,(mR)\,; \qquad (2.19)$$

Робота розширення газу при постійному тиску дорівнює:

$$A_1 = \frac{m}{\mu}R\,\Delta T\ ; \qquad (2.20)$$

Робота розширення газу при постійному об’ємі дорівнює нулю:

$$A_2 = 0\ ;$$

Тому повна робота газу буде дорівнювати: $A = A_1 + A_2 = A_1$;

Згідно з першим законом термодинаміки теплота Q, що передана газу дорівнює: $Q = A + \Delta U$. Врахувавши, що молярна маса кисню $\mu = 32\ 10^{-3}$ кг/моль, за формулою (2.19) обчислимо температуру газу:

$$T_1 = (\ 2\ 10^5\ 1\ 32\ 10^{-3}\ ) / 8{,}31 = 385\ К\ ;$$
$$T_2 = (\ 2\ 10^5\ 3\ 32\ 10^{-3}\ ) / 8{,}31 = 1155\ К\ ;$$
$$T_3 = (\ 5\ 10^5\ 3\ 32\ 10^{-3}\ ) / 8{,}31 = 2887\ К\ ;$$

Виконану газом роботу A обчислимо за формулою (2.20):

$$A = A_1 = 8{,}31\ 2\ (1155 - 385\ ) / 32\ 10^{-3} = 0{,}4\ 10^6\ Дж\ ;$$

Тоді:

$$\Delta U = {}^5/_2\ 8{,}31\ 2\ (2887 - 385) / 32\ 10^{-3} = 3{,}24\ 10^6\ Дж;$$
$$Q = A + \Delta U = 0{,}4\ 10^6 + 3{,}24\ 10^6 = 3{,}64\ 10^6\ Дж.$$

<u>Приклад 2.10.</u> В циліндрі під поршнем знаходиться водень масою m = 0,02 кг при температурі T_1 = 300 К. Водень спочатку розширився адіабатичне, збільшивши свій об’єм у 5 разів, а потім був стиснутий ізотермічно, причому об’єм газу зменшився в 5 разів. Знайти температуру водню наприкінці адіабатного розширення і роботу, виконану газом при цих процесах.

<u>Розв’язання.</u> Побудуємо графік цього термодинамічного процесу (див. рис. 2.2). Температура та об’єм газу, що здійснює адіабатний процес, зв’язані між собою співвідношенням:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1\ ;$$

Робота A_1 газу при адіабатному процесі визначається таким чином:

$$A_1 = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R(T_1 - T_2)\ ; \qquad (2.21)$$

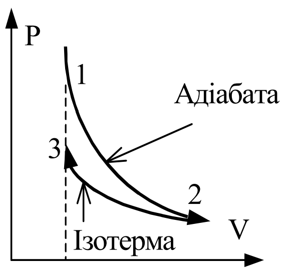

Рис. 2.2.

Робота A_2 газу при ізотермічному процесі визначається таким чином:

$$A_2 = \frac{m}{\mu}RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2}\ ; \qquad (2.22)$$

Виконаємо обчислення за формулами 2.21 та 2.22, врахувавши, що для двохатом-

них молекул водню i = 5, γ = 1.4, а його молярна маса $\mu = 2\ 10^{-3}$ кг/моль.

$$T_2 = 300\ ({}^1/_5)^{1{,}4-1} = 157\ К$$
$$A_1 = 0{,}02\ 5\ 8{,}31\ (300 - 157) / 2\ 2\ 10^{-3} = 29{,}8\ кДж\ ;$$
$$A_2 = 0{,}02\ 8{,}31\ 157\ \mathrm{Ln}(0{,}2) / 2\ 10^{-3} = -\ 21\ кДж.$$

Від’ємний знак у останньому результаті вказує на те, що при стискуванні газу робота над ним виконується зовнішніми силами.

<u>Приклад 2.11.</u> Теплова машина працює по оборотному циклу Карно. Температура нагрівача T_1 = 500 К. Визначити термічний к.к.д. η циклу і температуру T_2 холодильника теплової машини, якщо за рахунок кожного кілоджоуля теплоти, отриманої від нагрівача, машина здійснює роботу A = 350 Дж.

<u>Розв’язання.</u> Термічний к.к.д. теплової машини показує, яка частка теплоти, отриманої від нагрівача, перетворюється в механічну роботу. Термічний к.к.д. виражається формулою:

$$\eta = A / Q_1\ ;$$

де Q_1 - теплота, отримана від нагрівача; A – корисна робота, що виконана тепловою машиною.

Встановивши к.к.д. циклу, можна за формулою к.к.д. для циклу Карно $\eta = (T_1 - T_2) / T_1$, визначити температуру холодильника T_2:

$$T_2 = T_1\ (1 - \eta)\ ; \qquad (2.23)$$

Зробимо обчислення:

$$\eta = 350 / 1000 = 0{,}35\ ; \quad T_2 = 500\ (1 - 0{,}35) = 325\ К.$$

<u>Приклад 2.13.</u> Яку силу F треба прикласти до кінців стального стержня з площею поперечного перетину S = 10 см^2, щоб не дати йому розширитися при нагріванні від t_0 = 0°C до t = 30°C?

<u>Розв’язання.</u> При нагріванні стержень має подовжитись на ΔL :

$$\Delta L = L_0\ \alpha\ \Delta t\ ; \qquad (2.24)$$

де L_0 – довжина стержня; α - коефіцієнт лінійного розширення сталі.

Щоб не дати стержню подовжитись, до нього треба прикласти силу, що визначається з закону Гука. Тоді маємо:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{\Delta L}{L_0}E; \ \Rightarrow \ \Delta L = \frac{L_0}{E}\frac{F}{S}\ ; \qquad (2.25)$$

де E – модуль Юнга сталі.

З порівняння формул (2.26) та (2.27) отримаємо: $F = E\ S\ \alpha\ \Delta t$.
Робимо обчислення:

$$F = 216\ 10^{9}\ \ 10\ 10^{-4}\ 1{,}06\ 10^{-5}\ 30 = 71\ 10^{3}\ H\ ;$$

ДОДАТОК

I. Міжнародна система одиниць СІ.

Параметри	Розмірність	Найменування	Позначення
Довжина	L	метр	[м]
Маса	m	кілограм	[кг]
Час	t	секунда	[с]
Температура	Θ	кельвін	[К]
Кількість речовини	N	моль	[моль]
Сила струму	I	ампер	[А]
Сила світла	J	кандела	[кд]
Плоский кут	-	радіан	[рад]
Тілесний кут	-	стерадіан	[ср]

II. Головні фізичні сталі.

Фізична стала	Позначення	Значення
Прискорення вільного падіння	g	9,81 м/с²
Гравітаційна стала	G	$6{,}67\ 10^{-11}$ м^3/кг с^2
Стала Авогадро	N_A	$6{,}02\ 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярна газова стала	R	8,31 Дж/моль К^0
Стандартний об'єм	V_μ	$22{,}4\ 10^{-3}$ м^3/моль
Стала Больцмана	k	$1{,}38\ 10^{-23}$ Дж/К^0
Елементарний заряд	e	$1{,}60\ 10^{-19}$ Кл
Швидкість світла у вакуумі	c	$3\ 10^8$ м/с
Стала Стефана – Больцмана	σ	$5{,}67\ 10^{-8}$ Вт/м^2 К^4
Стала Вина	b	$2{,}90\ 10^{-3}$ м К
Стала Планка	h	$6{,}63\ 10^{-34}$ Дж с
Стала Ридберга	R	$1{,}10\ 10^7$ м$^{-1}$
Енергія іонізації атома водню	E_i	$2{,}18\ 10^{-18}$ Дж
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1{,}66\ 10^{-27}$ кг
Електрична стала	ε_0	$8{,}85\ 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	μ_0	$4\pi\ 10^{-7}$ Гн/м

III. Густина газів (при нормальних умовах).

Газ	Густина, кг/м^3	Газ	Густина, кг/м^3
Водень	0,09	Гелій	0,18
Повітря	1,29	Кисень	1,43

IУ. Деякі астрономічні величини.

Найменування	Значення
Радіус Землі	$6{,}37\ 10^6$ м
Маса Землі	$5{,}98\ 10^{24}$ кг
Маса Сонця	$1{,}9\ 10^{30}$ кг
Маса Місяця	$7{,}33\ 10^{22}$ кг
Відстань від центра Землі до центра Сонця	$1{,}49\ 10^{11}$ м
Відстань від центра Землі до центра Місяця	$3{,}84\ 10^8$ м
Середня густина Сонця	$1{,}41\ 10^3$ кг/ м^3

У. Властивості твердих тіл.

Речовина	Густина 10^3, кг/м^3	Темпера-тура плавлення, ^{0}С	Питома теплоєм-ність, Дж/кг К	Питома теплота плавлення, кДж/кг	Коефіцієнт лінійного роз-ширення, 10^{-5} К$^{-1}$
Алюміній	2,70	659	896	322	2,3
Ванадій	6,02	-	-	-	-
Вісмут	9,8	-	-	-	-
Залізо	7,88	1530	500	272	2,3
Літій	0,53	-	-	-	-
Латунь	8,4	900	386	-	1,9
Лід	0,9	0	2100	335	-
Мідь	8,6	1100	395	176	1,6
Олово	7,2	232	230	59	2,7
Платина	21,4	1770	117	113	0,9
Корка	0,2	-	2050	-	-
Свинець	11,3	327	126	23	2,9
Срібло	10,5	960	234	88	1,9
Сталь	7,7	1300	460	-	1,1
Цинк	7,1	420	391	117	2,9

УІ. Ефективний діаметр молекул.

Газ	Діаметр, 10^{-9} м	Газ	Діаметр, 10^{-9} м
Азот	0,3	Гелій	0,19
Водень	0,23	Кисень	0,27

УП. Пружні та теплові властивості твердих тіл.

Речовина	Межа міцності, МПа	Модуль Юнга, ГПа	Коефіцієнт теплопровідності, Вт/м К
Алюміній	110	69	210
Повсть	-	-	0,046
Залізо	294	195	58
Кварц	-	-	1,37
Мідь	245	118	390
Корка	-	-	0,05
Свинець	20	16	-
Срібло	290	74	460
Сталь	785	216	-
Ебоніт	-	-	0,174

УШ. Відносні атомні маси деяких елементів.

Елемент	Номер	А, а.о.м.	Елемент	Номер	А, а.о.м.
Азот, N	14	14	Марганець, Mn	55	55
Алюміній, Al	27	27	Мідь, Cu	64	64
Аргон, Ar	40	40	Молібден, Mo	96	96
Барій, Ba	137	137	Натрій, Na	23	23
Ванадій, V	60	60	Неон, Ne	20	20
Водень, H	1	1	Нікель, Ni	59	59
Вольфрам, W	184	184	Олово, Sn	119	119
Гелій, He	4	4	Платина, Pt	195	195
Залізо, Fe	56	56	Ртуть, Hg	201	201
Золото, Au	197	197	Сірка, S	32	32
Калій, K	39	39	Срібло, Ag	108	107
Кальцій, Ca	40	40	Вуглець, C	12	12
Кисень	16	16	Уран, U	238	238
Магній	24	24	Хлор, Cl	35	35

IX. Властивості рідин.

Рідина	Густина, 10^3 кг/м³	Питома теплоємність, Дж/кгК	Поверхневий натяг, Н/м.
Бензол	0,88	1720	0,03
Вода (при 4°С)	1,00	4190	0,073
Гліцерин	1,25	2430	0,064
Гас	0,8	2140	0,03
Касторова олія	0,9	1800	0,035
Мильна піна	-	-	0,04
Ртуть	13,6	138	0,5
Спирт	0,80	2510	0,02

X. Маса та енергія спокою елементарних частинок.

Частинка	Маса., кг	Енергія спокою, Дж
Електрон	$9{,}11\bullet10^{-31}$	$8{,}16\bullet10^{-14}$
Протон	$1{,}672\bullet10^{-27}$	$1{,}50\bullet10^{-10}$
Нейтрон	$1{,}675\bullet10^{-27}$	$1{,}51\bullet10^{-10}$
Дейтрон	$3{,}35\bullet10^{-27}$	$3{,}00\bullet10^{-10}$
α - частинка	$6{,}64\bullet10^{-27}$	$5{,}96\bullet10^{-10}$
π - мезон	$2{,}41\bullet10^{-28}$	$2{,}16\bullet10^{-11}$

XI. Грецький алфавіт.

Позначення букв	Назва букв	Позначення букв	Назва букв
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	ксі
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омікрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пі
Ε, ε	епсілон	Ρ, ρ	ро
Ζ, z	дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	ета	Τ, τ	тау
Θ, ϑ	тета	Υ, υ	іпсилон
Ι, ι	йота	Φ, φ	фі
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хі
Λ, λ	лямбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	мю	Ω, ω	омега

ЗМІСТ

Розділ III. Молекулярна фізика та термодинаміка.

ЧАСТИНА ДРУГА. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бушок Г.Ф., Півень Г.Ф. Курс фізики. Том І, -К: Вища школа, -1983. – 321 с.: іл.
2. Загальна фізика. Збірник задач. / За загальною редакцією Г.Г.Горбачука, -К:, Вища школа, -1993. –359 с.: іл.
3. Савельев И.В. Курс физики. Том І. -М.: Наука, -1989. –293 с.
4. Трофимова Т.И. Курс физики. -М: - Высшая школа, -1990. – 380 с.: ил.
5. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики, М: Наука, -1996. – 381 с.: ил.
6. Детлаф А.А.,.Яворский Б.М. Курс физики, -М:, Высшая школа, -1989. –608 с.: ил.
7. Физика. Методические указания и контрольные задания для студентов заочников инженерно-технических вузов / Под редакцией А.Г.Чертова. -М: Высшая школа. –1987. -208 с.: ил.

Навчальне видання

Несмашний Євген Олександрович

КЛАСИЧНА МЕХАНІКА
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА
І ТЕРМОДИНАМІКА

(видання третє)

В авторській редакції
Відповідальний за випуск В.В.Стецюк

Здано в набір Підписано до друку
Формат 60*84/16. Папір офсетний. Друк офсетний.
Об'єм. умов. друк. арк. 12.32 Обл. вид. арк. 11.4
Наклад 1000 прим. Замов. Замовне
ПП "Видавничий Дім" 50063 Кривий Ріг
вул. Тухачевського, 26. Свідоцтво ДК № 515 від 03.07.01.

КП «Криворізька друкарня».
50050, Кривий Ріг, ГСП-3, пр. Металургів, 28.